



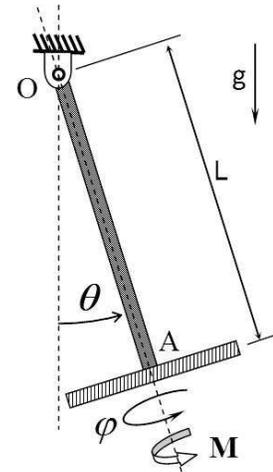
**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Prova Substitutiva de Mecânica B – PME 2200 – 03/07/2012**

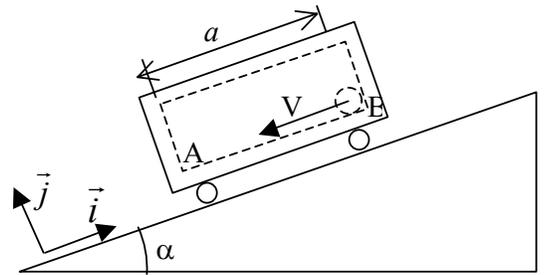
**Tempo de prova: 100 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)**

**1º Questão** (3,5 pontos) O disco de raio  $R$ , massa  $m$  e centro em  $A$ , gira em torno da haste  $AO$  que se move no plano da figura devido à ação do pino no ponto  $O$ . Entre a haste e o mancal em  $O$ , existe uma mola torcional de constante  $k$  e um amortecedor torcional viscoso com coeficiente de viscosidade  $c$ . Um torque  $M$  acelera o disco que tem velocidade angular  $\dot{\varphi}$ . Considerando a massa da haste desprezível, pede-se:

- Energia cinética do disco;
- Energia potencial do disco;
- Forças generalizadas atuantes no disco;
- Obter as equações de movimento do disco utilizando a formulação de Lagrange para as coordenadas generalizadas  $\theta$  e  $\varphi$ .



**2º Questão** (3,5 pontos) Um carro de massa  $M$  e comprimento interno  $a$  pode mover-se ao longo de uma rampa inclinada de um ângulo  $\alpha$  em relação à horizontal. Sobre sua base inferior  $AB$  há uma partícula esférica de massa  $m$  que se movimenta sem atrito. No instante inicial a partícula está no ponto  $B$ , com velocidade  $V$  na direção de  $A$ . Neste mesmo instante, o carro é abandonado sem velocidade inicial. O coeficiente de restituição para o choque dos materiais da esfera e do carro é  $\underline{e}$ . Nessas condições, pede-se:



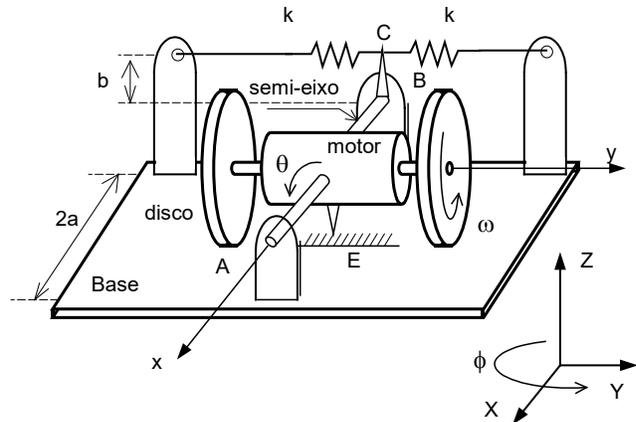
- A aceleração da partícula e do carro;
- O intervalo de tempo até o primeiro choque;
- A velocidade da partícula imediatamente após o primeiro choque;
- Idem (item b e c) após o segundo choque;
- As velocidades relativas sucessivas até o  $n$ -ésimo choque;
- O tempo decorrente entre o instante inicial e o de ocorrência do  $n$ -ésimo choque;
- Admitindo que  $u_n$  e  $v_n$  sejam, respectivamente, as velocidades do carro e da partícula antes do  $n$ -ésimo choque, determinar as suas velocidades após a ocorrência desse evento (ou seja, do  $n$ -ésimo choque).



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**3º Questão (3,0 pontos)**

Helicópteros possuem um sensor que mede a velocidade angular baseado no efeito giroscópico, sendo utilizado para controlar a sua atitude rotacional  $\dot{\phi}$  em torno do eixo vertical. O rotor do sensor é composto por um motor elétrico e dois discos fixados no eixo. A carcaça do motor elétrico é apoiada por dois semi-eixos sobre os mancais A e B, espaçados da distância  $2a$ , conforme mostrado na figura. Os semi-eixos são perpendiculares ao eixo do motor elétrico que mantêm a velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{j}$  do rotor constante. Duas molas de rigidez  $k$  fixadas no ponto C, solidário ao semi-eixo, têm deformação nula na posição  $\vec{\theta} = \theta \vec{i} = 0$  (quando  $\dot{\phi} = 0$  o braço BC está na vertical). As molas podem ser consideradas ideais e estão instaladas paralelas à base do sensor. Quando o helicóptero realiza uma manobra em torno do seu eixo vertical  $\vec{\phi} = \dot{\phi} \vec{K}$ , a base do sensor é arrastada alterando a posição angular  $\vec{\theta}$  do rotor, permitindo a identificação da velocidade angular  $\dot{\phi}$  no indicador angular E. Sabendo-se que a matriz de inércia do rotor é diagonal com momentos centrais  $I, J, I$  e utilizando o sistema de coordenadas móvel, pede-se:



- Determinar a velocidade angular absoluta do rotor do sensor;
- Deduzir as equações diferenciais do movimento angular do rotor utilizando o Teorema do Momento Angular (TMA);
- Obter a relação entre a velocidade angular  $\dot{\phi}$  de manobra do helicóptero e o ângulo de equilíbrio  $\theta$  do rotor do sensor, admitindo  $\ddot{\theta}$  desprezível;



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)**

- Energia cinética: Assumindo sistema de coordenadas com eixo  $Oy$  na direção da barra  $OA$  e eixo  $Ox$  perpendicular ao plano do desenho

$$T = T_{Disco} = \frac{1}{2} m \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A + m \vec{V}_A \cdot [\vec{\omega} \wedge (A - O)] + \frac{1}{2} \{\vec{\omega}\}' [I_A] \{\vec{\omega}\},$$

em que  $\vec{V}_A = \vec{V}_O + \dot{\theta} \vec{i} \wedge (A - O) = \dot{\theta} L \vec{k}$  e  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{i} + \dot{\varphi} \vec{j}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ em que } I = \frac{mR^2}{4} \text{ e } J = \frac{mR^2}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (1,0)$$

- Energia potencial:  $V = V_{El} + V_{Grav} \Rightarrow V = \frac{1}{2} k \theta^2 + mg(L - L \cos \theta) \quad (1,0)$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} k \theta^2 - mg(L - L \cos \theta)$$

- Função de dissipação de Rayleigh:  $R = \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2 \quad (0,5)$

- Forças generalizadas:  $\delta W = M \delta \varphi \Rightarrow Q_\theta = 0$  e  $Q_\varphi = M \quad (0,5)$

- Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \text{ com } q_1 = \theta \text{ e } q_2 = \varphi$$

Para  $\theta$ :  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \dot{\theta} L^2 + I \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m L^2 \ddot{\theta} + I \ddot{\theta}$  ;  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k \theta + mg L \sin \theta)$  ;  $\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = c \dot{\theta}$

$$m L^2 \ddot{\theta} + \frac{m R^2}{4} \ddot{\theta} + k \theta + mg L \sin \theta + c \dot{\theta} = 0$$

Para  $\varphi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J \ddot{\varphi} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{m R^2}{2} \ddot{\varphi} = M \quad (0,5)$$



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

---

**Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos)**

Como a esfera e o carro estão sujeitos à mesma aceleração (0,5)

$$a' = g \sin \alpha ,$$

o primeiro choque da esfera com o carro ocorre após o intervalo de tempo (0,5)

$$t_1 = \frac{a}{V} .$$

Imediatamente após esse choque, a velocidade relativa da esfera muda para: (0,5)

$$V_1 = -eV .$$

Conclui-se que as velocidades relativas sucessivas serão: (0,5)

$$v_{r1} = V$$

$$v_{r2} = -eV$$

$$v_{r3} = e^2V$$

...

$$v_m = (-e)^{n-1}V$$

e que os intervalos de tempo que separam dois choques sucessivos serão: (0,5)

$$t_1 = \frac{a}{V}$$

$$t_2 = \frac{a}{eV}$$

...

$$t_n = \frac{a}{e^{n-1}V}$$

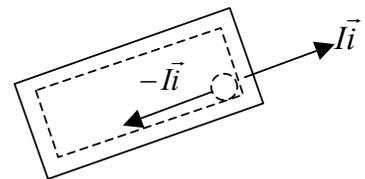
Portanto, o tempo  $t(0, n)$  decorrente desde o instante inicial até a ocorrência do  $n$ -ésimo choque será:

$$t(0, n) = \frac{a}{V} + \frac{a}{eV} + \frac{a}{e^2V} \cdots + \frac{a}{e^{n-1}V} = \frac{a}{V} \left( 1 + \frac{1}{e} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}} \right) . \quad (0,5)$$

Para o sistema material constituído pelo carro e pela esfera, os únicos impulsos atuantes durante os eventos de choque são os impulsos internos  $\vec{l}_i$  e  $-\vec{l}_i$  indicados na figura ao lado.

No instante inicial, a quantidade de movimento desse sistema é:

$$\vec{Q} = -m\vec{V}_i$$





**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

---

Portanto, a quantidade de movimento desse sistema após um intervalo de tempo  $t$ , é dada por:

$$\vec{Q} = -[mV + (m+M)g \sin \alpha] \vec{j}$$

Como são dadas as velocidades  $u_n$  e  $v_n$  do carro e da esfera, imediatamente antes do  $n$ -ésimo choque, pode-se escrever:

$$-(Mu_n + mv_n) \vec{j} = -[mV + (m+M)g \sin \alpha(0, n)] \vec{j}$$

$$\therefore Mu_n + mv_n = mV + (m+M)g \sin \alpha(0, n)$$

E como a quantidade de movimento do sistema se conserva durante o evento do choque, resulta:

$$Mu'_n + mv'_n = mV + (m+M)g \sin \alpha \frac{a}{V} \left( 1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^{n-1}} \right) \quad (1)$$

Para o  $n$ -ésimo choque, tem-se:

$$v'_n - u'_n = (-e^n)V \quad (2)$$

Resolvendo-se o sistema de equações 1-2, obtêm-se: **(0,5)**

$$u'_n = \frac{m}{M+m} [1 - (-e)^n] V + g \sin \alpha \frac{a}{V} \left( 1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^{n-1}} \right)$$

$$v'_n = \frac{m+M(-e)^n}{M+m} V + g \sin \alpha \frac{a}{V} \left( 1 + \frac{1}{e} + \dots + \frac{1}{e^{n-1}} \right)$$



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

---

**Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)**

a)  $\vec{\Omega}_{abs} = \omega_{rel} + \omega_{arr} = (\dot{\theta}\vec{i} + \omega\vec{j}) + \dot{\phi}\vec{K}$  (0,5 pontos)

b) Aplicando o TMA no baricentro do rotor, considerando o referencial móvel  $G\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  e apenas o movimento angular constante do helicóptero no plano horizontal, ou seja  $\vec{K} = \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{j}$ :

$$(\vec{H}_G) = \left( \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega + \dot{\phi}\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{bmatrix} \right); \frac{d}{dt}(\vec{H}_G) = \frac{d}{dt}(\vec{H}_G) + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = \vec{M}_G \quad (0,5 \text{ pontos})$$

Considerando a velocidade angular de arrastamento  $\dot{\phi}\vec{K} = \dot{\phi}(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{j})$ , a variação temporal dos versores do referencial móvel são:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{i} = \dot{\phi}(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{j}) \wedge \vec{i} = \cos\theta\dot{\phi}\vec{j} - \sin\theta\dot{\phi}\vec{k};$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{j} = -\cos\theta\dot{\phi}\vec{i} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \sin\theta\dot{\phi}\vec{i} \quad \text{resultando em:}$$

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\theta} + (J_z - J_y) \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - J_y \cos\theta \dot{\phi} \omega &= M_x \\ J_y \frac{d}{dt}(\omega + \dot{\phi}\sin\theta) + J_x \cos\theta \dot{\phi} \dot{\theta} &= M_y \\ J_x \frac{d}{dt}(\dot{\phi}\cos\theta) - J_x \sin\theta \dot{\phi} \dot{\theta} &= M_z \end{aligned}$$

(0,5 pontos)

As reações dos mancais A e B produzem momento nas direções  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  e o momento das molas na direção  $\vec{i}$ , consideradas paralelas à base, tem magnitude  $M_x = -2kb^2 \sin\theta$ . Em torno de pequenos ângulos a primeira equação resulta em:

$$J_x \ddot{\theta} + (J_z - J_y) \theta \dot{\phi}^2 - J_y \dot{\phi} \omega = -2kb^2 \theta \quad (0,5 \text{ pontos})$$

c) Para aceleração angular do rotor desprezível ( $\ddot{\theta} \approx 0$ ) e  $\dot{\phi}$  pequeno, pode-se desprezar o segundo termo da equação devido a  $\omega \gg \theta$ , obtendo-se a função de sensibilidade do sensor:

$$\theta = \frac{J_y \omega}{2k b^2} \dot{\phi}$$

(1,0 pontos)