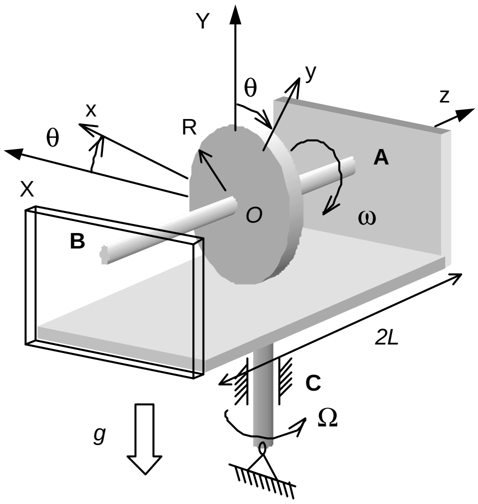
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

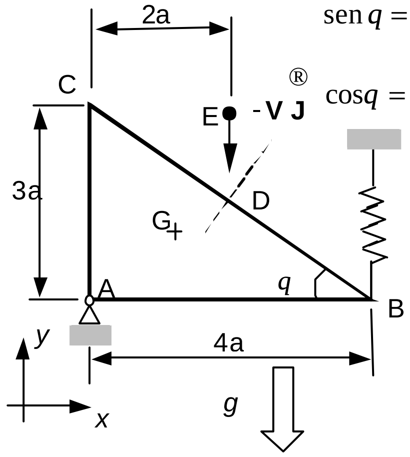
PROVA SUBSTITUTIVA DE MECÂNICA B – PME 2200 - 28 de junho de 2011
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletro-eletrônicos)

1ª Questão (4,0 pontos) No sistema da figura, o disco de massa ***m*** e raio ***R***, está preso a um eixo de massa desprezível, que gira em torno dos mancais ideais ***A*** e ***B*** com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ constante. Os mancais estão fixados em um suporte de massa desprezível e largura 2***L*** que gira em torno do eixo ***C***y fixo. O suporte possui velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{j}$ constante. Pede-se:



a) Fazer o diagrama de forças sobre o corpo livre e determinar a velocidade angular do disco;
b) Utilizando um referencial solidário ao eixo, determinar o momento angular e escrever a expressão do *TMA* para o disco;
c) Determine as reações nos mancais ***A*** e ***B***.

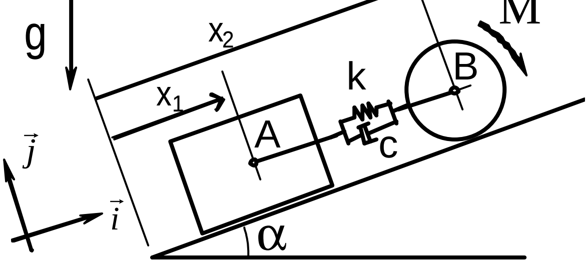
2ª Questão (3,0 pontos) Na figura ao lado, a cunha *ABC* de massa ***M*** está em equilíbrio na posição horizontal sustentada por uma articulação ideal em ***A*** e por uma mola de pequena rigidez em ***B***. A cunha é atingida no ponto ***D*** por uma esfera ***E*** de massa ***m*** que possui velocidade $-V\,\vec{j}$ no instante imediatamente anterior ao impacto, que ocorre sem atrito e com coeficiente de restituição "***e***". No instante imediatamente após o impacto, a esfera adquire velocidade na direção horizontal. São conhecidos ainda o momento de inércia J_{Az} da cunha e as grandezas mostradas na figura. Pedem-se:



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

a) o diagrama de forças impulsivas para o corpo livre no momento do impacto;
b) obter as equações de impacto para os dois corpos em função dos parâmetros acima;
c) calcular o impulso e o coeficiente de restituição "***e***" no contato esfera-cunha, os impulsos reativos e a velocidade angular da cunha no instante imediatamente após o impacto.

3ª Questão (3,0 pontos) No sistema mostrado na figura, o disco de massa ***m*** e raio ***R*** rola sem escorregar sobre o plano inclinado e está acoplado a um bloco de massa ***m*** por meio de uma mola de rigidez ***k*** e de um amortecedor viscoso linear de constante ***c***. Um binário cujo momento é ***M*** atua no disco e o bloco desliza <u>com atrito</u> sobre o plano inclinado. Usando x_1 e x_2 como coordenadas generalizadas, determine:

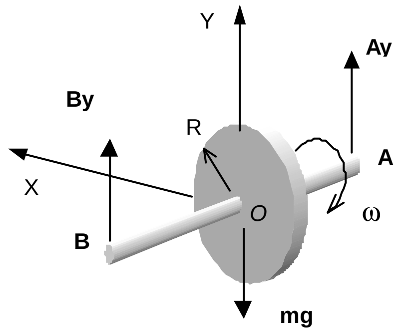


(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) As equações de movimento para as coordenada x_1 e x_2, usando o método de *Lagrange*.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª. Questão (4 pontos)



a) Diagrama de força sobre o corpo livre: (0,5 ponto)

Vetor de rotação do disco: $\boxed{\vec{w}_{ABS} = \Omega\,\vec{j} + w\,\vec{k}}$ (0,5 ponto)

Tomando o pólo O e um referencial solidário ao eixo:

b) Momento angular do disco: $\boxed{\vec{H}_O = J_y\,\Omega\,\vec{j} + J_z\,w\,\vec{k}}$ (0,5 ponto)

Como $\vec{w}\; e\, \vec{\Omega}$ são constantes, $\vec{j}$ é fixo e $\dot{\vec{k}} = \Omega\,\vec{j} \wedge \vec{k} = \Omega\,\vec{i}$ a derivada do momento angular em relação ao tempo resulta:

$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = J_z\,w\,\Omega\,\vec{i}}$ (1,0 ponto)

Utilizando o TMA no disco: $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O = (A-O)\wedge\vec{R}_A + (B-O)\wedge\vec{R}_B = L(-A_y + B_y)$

c) Utilizando o TMB no disco: $A_y + B_y = mg$ (0,5 ponto)

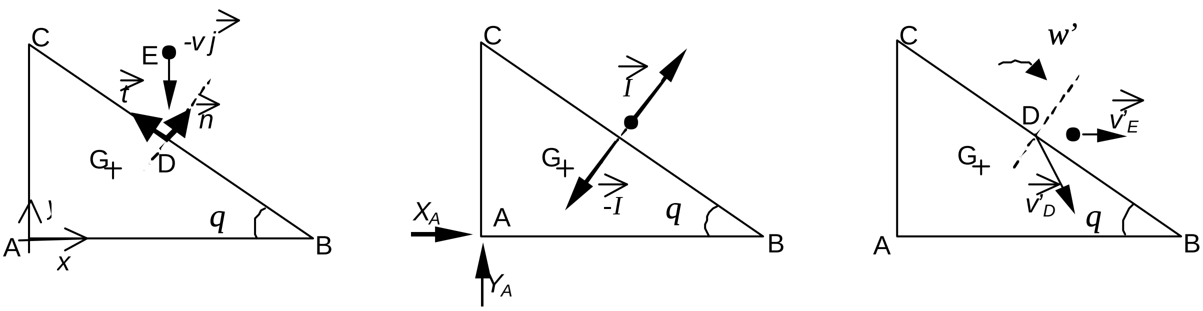
Reações nos mancais $\boxed{B_y = -\dfrac{mg}{2} - \dfrac{mR^2 w\,\Omega}{2L}}$ e $\boxed{A_y = -\dfrac{mg}{2} + \dfrac{mR^2 w\,\Omega}{2L}}$ (1,0 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª. Questão (3 pontos)

a) mostra-se o diagrama de forças impulsivas e os diagramas de velocidades imediatamente antes e imediatamente após o choque entre os corpos   (1,0 ponto)



b) vamos utilizar as equações do TRI para a esfera e para a cunha, o TMI para a cunha e a hipótese de Newton para o choque entre os dois corpos   (1,0 ponto)

Esfera: TRI

$$m(\vec{v}'_E - \vec{v}_E) = \vec{I} \Rightarrow m(v'_E\vec{i} - (-v\vec{j})) = I(senq\vec{i} + \cos q\vec{j})$$

$$\therefore mv'_E = I\,\mathrm{sen}q \quad (1)$$

$$mv = I\cos q \quad (2)$$

Cunha: TRI e TMI

TRI

$$M(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = -\vec{I} + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \Rightarrow M\vec{v}'_G = -I(\mathrm{sen}q\,\vec{i} + \cos q\,\vec{j}) + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \qquad (3)$$

Relação cinemática (equação fundamental da cinemática do sólido)

$$\vec{v}'_G = \vec{v}'_D + \vec{w}' \wedge (G - D)$$

$$\vec{v}'_D = \vec{v}'_A + \vec{w}' \wedge (D - A) = w'\vec{k} \wedge \left(2a\vec{i} + \frac{3a}{2}\vec{j}\right) = \frac{a}{2}w'\left(-3\vec{i} + 4\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{v}'_G = \frac{a}{2}w'\left(-3\vec{i} + 4\vec{j}\right) + w'\vec{k} \wedge \left((\frac{4a}{3} - 2a)\vec{i} + (a - \frac{3a}{2})\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{v}'_G = aw'(-1\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}) \qquad (4)$$

TMI (pólo A)

$$(D - A) \wedge (-\vec{I}) = J_A w'\vec{k} \Rightarrow \left(2a\vec{i} + \frac{3a}{2}\vec{j}\right) \wedge -I(\mathrm{sen}q\,\vec{i} + \cos q\,\vec{j}) = J_A w'\vec{k}$$

$$I\left(-2a\cos q + \frac{3a}{2}\mathrm{sen}q\right)\vec{k} = J_A w'\vec{k} \qquad (5)$$

Hipótese de Newton:

(utilizam-se as seguintes equações de transformação de coordenadas):

$$\vec i = \text{sen}q\;\vec n - \cos q\;\vec t$$
$$\vec j = \cos q\;\vec n + \text{sen}q\;\vec t$$

$$(\vec v'_E - \vec v'_D).\vec n = -e(\vec v_E - \vec v_D).\vec n \Rightarrow (\vec v'_E - \vec v'_D).\vec n = -e\vec v_E.\vec n$$

$$\left\{v'_E(\text{sen}q\;\vec n - \cos q\;\vec t) - \frac{a}{2}w'\left[3(-\text{sen}q\;\vec n + \cos q\;\vec t) + 4(\cos q\;\vec n + \text{sen}q\;\vec t)\right]\right\}.\vec n = -ev(-\cos q\;\vec n - \text{sen}q\;\vec t).\vec n$$

$$\therefore v'_E\text{sen}q + \frac{a}{2}w'(3\text{sen}q - 4\cos q) = ev\cos q \qquad (6)$$

c) Substiuindo-se os valores de seno e cosseno dados, as equações (1)-(6) fornecem os resultados solicitados: (1,0 ponto)

de (2),

$mv = I\cos q = I\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{I = \frac{5}{4}mv}$ em (1), $mv'_E = I\,\text{sen}q = I\frac{5mv}{4}\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{v'_E = \frac{3}{4}v}$

Em (5)

$$I\left(-2a\cos q + \frac{3a}{2}\text{sen}q\right)\vec k = J_A w'\vec k \;\Rightarrow \frac{5}{4}mv\left(-2a\frac{4}{5} + \frac{3a}{2}\frac{3}{5}\right) = J_A w' \Rightarrow \boxed{w' = -\frac{7mva}{8J_A}}$$

Em (6)

$$v'_E\text{sen}q + \frac{a}{2}w'(3\text{sen}q - 4\cos q) = ev\cos q$$

$$\frac{3v}{4}\frac{3}{5} + \frac{a}{2}\left(\frac{-7mva}{8J_A}\right)\left(3\frac{3}{5} - 4\frac{4}{5}\right) = ev\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{9v}{20} + \frac{49mva^2}{80J_A} = \frac{4}{5}ev \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{16}\left(9 + \frac{49ma^2}{4J_A}\right)}$$

De (3) e (4)

$$\vec v'_G = aw'(-1\vec i + \frac{4}{3}\vec j) = a\frac{-7mva}{8J_A}(-1\vec i + \frac{4}{3}\vec j) \Rightarrow \vec v'_G = \frac{7mva^2}{8J_A}(1\vec i - \frac{4}{3}\vec j)$$

$$M\vec v'_G = -I(\text{sen}q\;\vec i + \cos q\;\vec j) + X_A\vec i + Y_A\vec j \Rightarrow$$

$$M\frac{7mva^2}{8J_A}(1\vec i - \frac{4}{3}\vec j) = -\frac{5mv}{4}\left(\frac{3}{5}\vec i + \frac{4}{5}\vec j\right) + X_A\vec i + Y_A\vec j \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec i : M\frac{7mva^2}{8J_A} + \frac{3mv}{4} = X_A\\ &\vec j : -M\frac{7mva^2}{8J_A}\frac{4}{3} + mv = Y_A\end{aligned}}$$

Resolução da 3ª. Questão (3 pontos)

(a) $T = T_A + T_B = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_{B,z}\frac{\dot{x}_2^2}{R^2}$, onde $J_{B,z} = \frac{mR^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2}$ (0,5)

(b) $V = V_{El} + V_{Grav}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_o)^2 + mgsen\,a\,(x_1 + x_2)}$ (0,5)

(c) $R = \frac{1}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$

Forças generalizadas: $dW = Mdq_B - F_{at}dx_1$, onde $q_B = \frac{x_2}{R}$ define a rotação do disco com centro B:

$$Q_{x_1} = M\frac{\partial q_B}{\partial x_1} - F_{at}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = -F_{at}$$ (0,5),

$$Q_{x_2} = M\frac{\partial q_B}{\partial x_2} - F_{at}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{M}{R}$$ (0,5)

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \text{, com } q_1 = x_1 \text{ e } q_2 = x_2$$

Para x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(-k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\,a) \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\,a - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = -F_{at}}$$ (0,5)

Para x_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2}m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\,a) \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\,a + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \frac{M}{R}}$$ (0,5)