ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

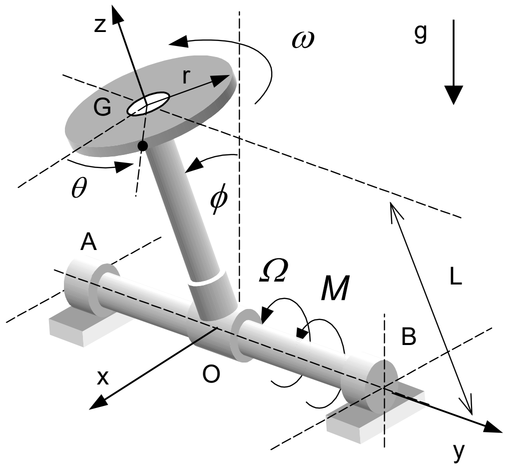
Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP

Departamento de Engenharia Mecânica

Prova Substitutiva de MECÂNICA B – PME 2200 – 29 de junho de 2010
Duração: 100 minutos. Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 1: (3,5 pontos)

O disco de centro ***G*** tem massa ***m***, raio ***r*** e gira em torno do vínculo perfeito do eixo ***GO*** de comprimento ***L*** com velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ constante. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal ***AB***, sem atrito, com velocidade angular $\Omega = \dot{\phi}$ e está submetido a um momento externo ***M***. Considerando o referencial móvel *Oxyz* solidário à estrutura ***AOBG***, conforme a figura, pede-se:

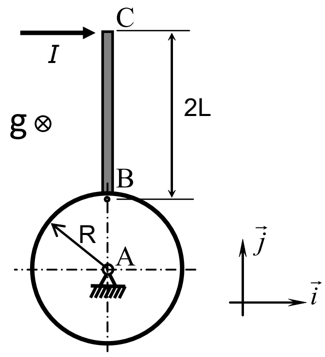


a) Determine o vetor velocidade angular absoluta do disco;
b) Faça o diagrama de corpo livre do disco;
c) Calcule o momento angular do disco em relação ao pólo G;
d) Determine a equação de movimento e o momento reativo do disco na estrutura ***AOBG***.

Dados: $J_{Gx} = \dfrac{m\,r^2}{4}$; $J_{Gy} = \dfrac{m\,r^2}{4}$; $J_{Gz} = \dfrac{m\,r^2}{2}$

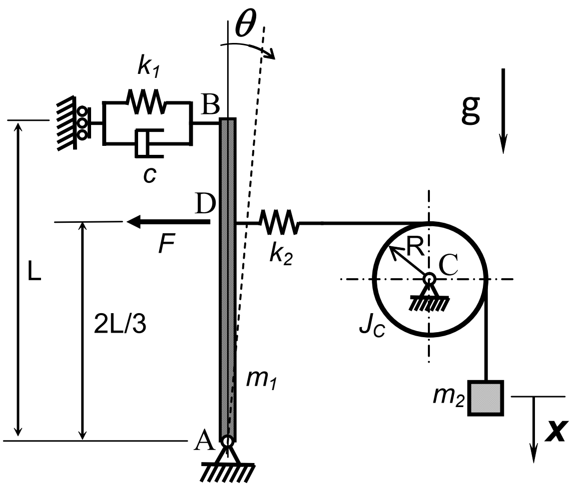
Questão 2: (3,0 pontos)

O sistema mostrado na figura é composto pela barra *BC*, de massa *m* e comprimento *2L*, e pelo disco de massa *m*, raio *R* e centro *A*. O sistema encontra-se inicialmente em repouso. Em um dado instante, um impulso conhecido $\vec{I} = I\,\vec{i}$ é aplicado ao ponto *C* da barra. Determine o vetor de rotação do disco no instante imediatamente posterior à aplicação do impulso.



Questão 3: (3,5 pontos) **- Baseada no EMSC#3**

No sistema mostrado na figura a configuração apresentada no EMSC#3 foi alterada pela mudança do ponto de aplicação da força horizontal *F* do ponto *B* para o ponto *D*. Nesta nova configuração, o sistema permanece composto: Pela barra *AB* de massa m_1 e comprimento *L*; pela polia de raio *R* e momento de inércia J_C em relação ao eixo perpendicular à mesma, passando pelo centro *C*; pela massa m_2; pelas molas com rigidez k_1 e k_2, que têm deformação nula quando $\theta = 0$ e $x = 0$, e pelo amortecedor viscoso linear de constante *c*. A mola com rigidez k_1 e o amortecedor estão montados sem restrições de movimento na vertical, de forma que o conjunto permanece na horizontal para qualquer valor de θ. Adicionalmente, considere que o fio tem comportamento ideal e que a distância entre a barra *AB* e o centro da polia é grande o suficiente a ponto de se poder considerar que a mola com rigidez k_2 também permanece na horizontal.



Pede-se:

a) Calcular a energia cinética do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.
b) Calcular a energia potencial do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.
c) Determinar as forças generalizadas associadas às coordenadas θ e x.
d) Determinar as equações do movimento para as coordenadas θ e x, usando o método de Lagrange.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

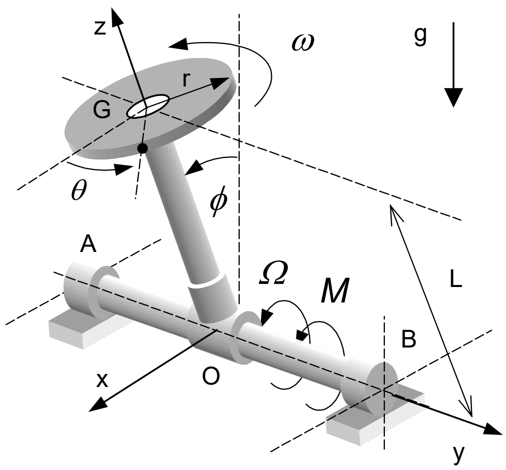
Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP

Departamento de Engenharia Mecânica

GABARITO

Resolução da Questão 1 (3,5 pontos)

O disco de centro ***G*** tem massa ***m***, raio ***r*** e gira em torno do vínculo perfeito do eixo ***GO*** de comprimento ***L*** com velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ constante. O conjunto, por sua vez, gira em torno do eixo horizontal ***AB***, sem atrito, com velocidade angular $\Omega = \dot{\phi}$ e está submetido a um momento externo ***M***. Considerando o referencial móvel *Oxyz* solidário à estrutura ***AOBG***, conforme a figura, pede-se:



a) Determine o vetor velocidade angular absoluta do disco;
b) Faça o diagrama de corpo livre do disco;
c) Calcule o momento angular do disco em relação ao pólo G;
d) Determine a equação de movimento e o momento reativo do disco na estrutura ***AOBG***.

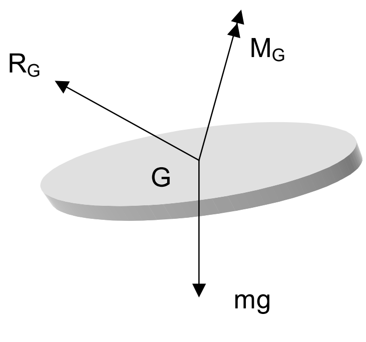
Dados: $J_{Gx} = \dfrac{m r^2}{4}$; $J_{Gy} = \dfrac{m r^2}{4}$; $J_{Gz} = \dfrac{m r^2}{2}$

a) Determine o vetor velocidade angular absoluta do disco;

$$\vec{\Omega}_{abs} = \vec{\Omega}_{rel} + \vec{\Omega}_{arr} \quad \rightarrow \quad \vec{\Omega}_{abs} = \dot{\theta}\vec{k} + \dot{\phi}\vec{J} \quad \text{como } \vec{J} = \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{abs} = \omega\vec{k} + \Omega\,\vec{j}}$$ (0,5 pontos)

b) Faça o diagrama de forças sobre o corpo livre: as reações no vínculo G são: $m\vec{g}$, $\vec{R}_G$ e o momento de mancal $\vec{M}_G$
(0,5 pontos)



c) Calcule o momento angular do disco em relação ao pólo em G:

$$\left[\vec{H}_G\right] = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ \omega \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{H}_G = J_y\,\Omega\,\vec{j} + J_z\,\omega\vec{k}}$$ (0,5 pontos)

d) Determine a equação de movimento e o momento reativo na estrutura ***AOBG***: fazendo a derivado em relação ao tempo do momento angular:

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\Omega}_{arr} \wedge \vec{j} = \dot{\phi}\,\vec{j} \wedge \vec{j} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{j}} = 0;$$

$\dot{\vec{k}} = \vec{\Omega}_{arr} \wedge \vec{k} = \dot{\phi}\,\vec{j} \wedge \vec{k} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{k}} = \Omega\,\vec{i}$ (0,5 pontos)

$\dot{\vec{H}}_G = J_y\,\dot{\Omega}\,\vec{j} + J_y\,\Omega\,\dot{\vec{j}} + J_z\,\dot{\omega}\,\vec{k} + J_z\,\omega\,\dot{\vec{k}}$ (0,5 pontos)

$J_y\,\dot{\Omega}\,\vec{j} + J_z\,\dot{\omega}\,\vec{k} + J_z\,\omega\Omega\,\vec{i} = \vec{M}_G$ (0,5 pontos)

$$\boxed{\begin{Bmatrix} J_z\,\omega\Omega = M_{Gx} \\ J_y\,\dot{\Omega} = M_{Gy} \end{Bmatrix}}$$

Momento reativo do disco na estrutura ***AOBG***

$\boxed{\vec{M}_G^{AOBG} = -J_z\,\omega\Omega\,\vec{i} - J_y\,\dot{\Omega}\,\vec{j}}$ (0,5 pontos)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da Questão 2 (3,0 pontos)

TMI na barra:

$$\Delta\vec{H}_G = (I_{xB} - I)L\vec{k}$$

$$I - I_{xB} = \frac{J_{zG}}{L}\Omega' \quad (1) \qquad (0,5)$$

TMI no disco:

$$\Delta\vec{H}_A = I_{xB}R\vec{k}$$

$$I_{xB} = \frac{J_{zA}}{R}\omega' \quad (2) \qquad (0,5)$$

TI na barra:

$$I + I_{xB} = mv'_{Gx} \quad (3) \qquad (0,5)$$

Poisson no disco: $\vec{v}'_B = \omega' R\vec{i}$ (4) (0,5)

Poisson na barra:

$$\vec{v}'_G = \vec{v}'_B - \Omega'\vec{k} \wedge L\vec{j}$$

$$\vec{v}'_G = (\Omega' L - \omega' R)\vec{i} \quad (5) \qquad (0,5)$$

Substituindo (5) em (3):

$$I + I_{xB} = mL\Omega' - mR\omega' \quad (6)$$

Resolvendo então (1), (2) e (6):

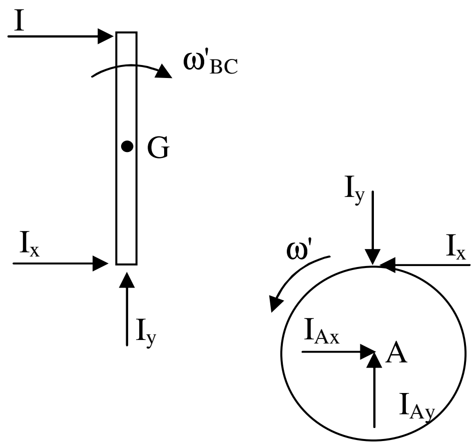
de (1): $\Omega' = \frac{L}{J_{zG}}(I - I_{xB})$ (7)

Substituindo (2) e (7) em (6):

$$I + \frac{J_{zA}}{R}\omega' = \frac{mL^2}{J_{zG}}\left(I - \frac{J_{zA}}{R}\omega'\right) - mR\omega'$$

Resolvendo:

$$\left(\frac{J_{zA}}{R} + \frac{mL^2}{R}\frac{J_{zA}}{J_{zG}} + mR\right)\omega' = \left(\frac{mL^2}{J_{zG}} - 1\right)I$$



sendo $J_{zA} = \frac{mR^2}{2}$ e $J_{zG} = \frac{4mL^2}{12}$

resulta em:

$$\boxed{\omega' = \frac{2I}{3mR}} \qquad (0,5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Luciano Gualberto, travessa 3 nº380 CEP05508-900 São Paulo SP
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da Questão 3 (3,5 pontos)

Energia cinética: $\boxed{T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{m_1 L^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_C \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2}$ (0,5)

Energia potencial: $\boxed{V = m_1 g \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) - m_2 g x + \frac{1}{2} k_2 \left(x - \frac{2L}{3}\mathrm{sen}\theta\right)^2 + \frac{1}{2} k_1 (L\mathrm{sen}\theta)^2}$ (0,5)

Função dissipação de Rayleigh: $\boxed{R = \frac{1}{2} c (L\cos\theta\dot{\theta})^2}$ (0,5)

Forças generalizadas:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2L}{3}\mathrm{sen}\theta \\ F_1 = -F \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q''_x = 0} \quad (0{,}5) \qquad Q''_\theta = (-F)\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{Q''_\theta = -\frac{2FL}{3}\cos\theta} \quad (0{,}5)$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_1 L^2}{3}\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{m_1 L^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_1 g \frac{L}{2}\mathrm{sen}\theta - k_2\left(x - \frac{2L}{3}\mathrm{sen}\theta\right)\left(-\frac{2L}{3}\cos\theta\right) - k_1 L^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = cL^2\dot{\theta}\cos^2\theta$$

$$\boxed{\frac{m_1 L^2}{3}\ddot{\theta} + m_1 g \frac{L}{2} sen\theta - \frac{2k_2 L}{3}\cos\theta\left(x - \frac{2L}{3} sen\theta\right) + k_1 L^2 sen\theta\cos\theta + cL^2\dot{\theta}\cos^2\theta = -\frac{2FL}{3}\cos\theta} \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m_2 + \frac{J_C}{R}\right)\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m_2 + \frac{J_C}{R}\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m_2 g - k_2\left(x - \frac{2L}{3}\mathrm{sen}\theta\right)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\boxed{\left(m_2 + \frac{J_C}{R}\right)\ddot{x} - m_2 g + k_2\left(x - \frac{2L}{3}\mathrm{sen}\theta\right) = 0} \quad (0{,}5)$$