ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

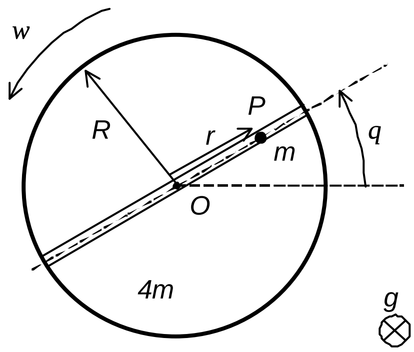
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 30 de junho de 2009

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

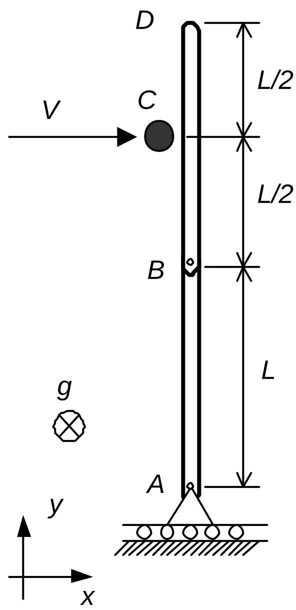


No disco de centro ***O*** e massa 4***m***, há uma guia transversal por onde desliza sem atrito a partícula ***P*** de massa ***m***. O disco é forçado a girar com velocidade angular w constante.

Determinar:

a) A energia cinética e energia potencial da partícula ***P*** usando ***r*** e q como coordenadas generalizadas.
b) A forças generalizadas atuantes sobre a partícula ***P***.
c) A equação do movimento da partícula ***P*** usando o método de *Langrange*.
d) O momento ***M*** que sustenta a velocidade angular $\dot{q} = w_o = cte$.

2ª Questão (3,5 pontos)



O sistema mostrado na figura ao lado é composto por duas barras articuladas em ***B***, cada uma com massa ***m*** e comprimento ***L***, e está em repouso sobre um plano horizontal. Em um dado instante uma esfera de massa ***m*** e dimensões desprezíveis, atinge o ponto ***C*** com velocidade $\vec{V}$ ortogonal à barra ***BD***. Sabendo que o choque foi totalmente anelástico, determine o vetor de rotação da barra ***BD*** no instante imediatamente após o choque. Desprezar as forças de atrito.

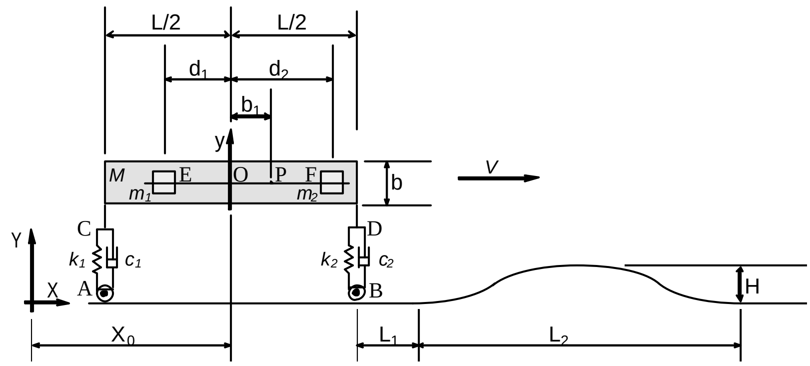
3ª Questão EMSC#3 (3,0 pontos)

O sistema mostrado na figura no verso da página representa uma simplificação de um veículo e seu sistema de suspensão. Nesta simplificação, o sistema é composto por um sólido retangular de massa M e por duas massas concentradas m_1 e m_2. O ponto P indica o local onde o condutor do veículo está posicionado. O sólido retangular está apoiado sobre dois conjuntos mola-amortecedor, cada um dos quais com valores próprios de rigidez da mola k e da constante c do amortecedor viscoso linear. As duas molas têm comprimento l_0 quando a deformação é nula. No instante mostrado na figura, o conjunto move-se sobre uma superfície horizontal, com velocidade constante $\vec{V} = V\vec{i}$. Após percorrer uma distância L_1, o veículo tem de suplantar um obstáculo em sua trajetória. Durante a passagem pelo obstáculo, a velocidade horizontal do ponto O permanece constante $\vec{V} = V\vec{i}$.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

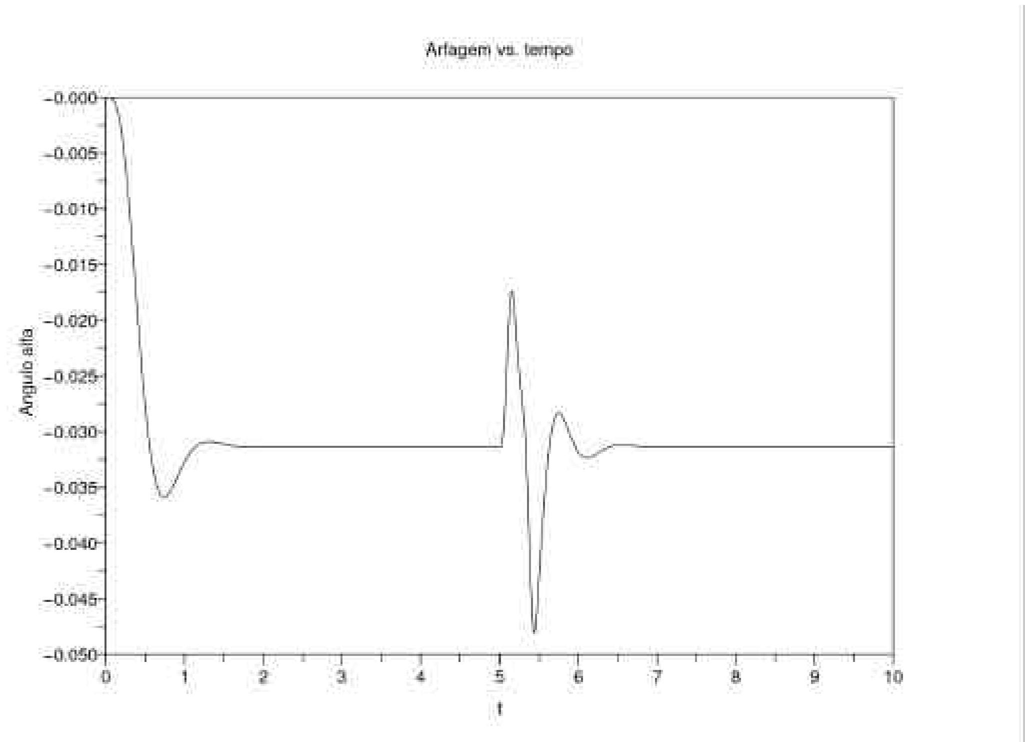
Departamento de Engenharia Mecânica



O pavimento tem altura definida por:
$$h = \begin{cases} 0 \ se\ X \le L_1 + L/2 \\ \dfrac{H}{2}\left(1-\cos\left(\dfrac{2p}{L_2}X\right)\right) se\ L_1 + L/2 < X < L_1 + L_2 + L/2 \\ 0 \ se\ X \ge L_1 + L_2 + L/2 \end{cases}$$

(a) Calcular a energia potencial do sistema usando a e Y_o como coordenadas generalizadas.

(b) Com base na figura abaixo, obtida em uma das condições definidas no enunciado do problema, o que se pode afirmar a respeito da relação entre as constantes elásticas k_1 e k_2 das duas molas do problema? Justifique



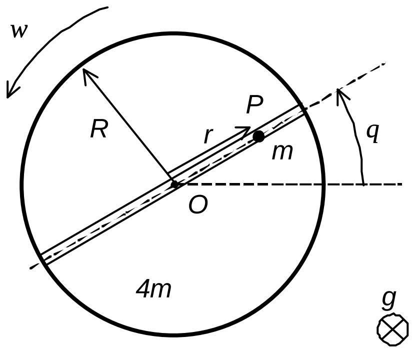
(c) Definimos neste exercício de simulação e modelagem um índice de desconforto: a amplitude do movimento no banco do motorista em relação à sua posição de equilíbrio. Com base nas simulações, descreva como variou o índice de desconforto do motorista quando o posicionamento das massas concentradas m_1 e m_2 foi alterado de $d_1 = d_2 = 2{,}5$ m para $d_1 = 0{,}5$ m e $d_2 = 2{,}5$ m.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª Questão (3,5 pontos)



No disco de centro ***O*** e massa ***4m***, há uma guia transversal por onde desliza sem atrito a partícula ***P*** de massa ***m***. O disco é forçado a girar com velocidade angular w constante.

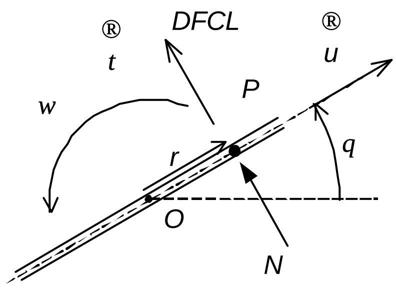
Determinar:

a) A energia cinética e energia potencial da partícula ***P*** usando ***r*** e q como coordenadas generalizadas.

b) A forças generalizadas atuantes sobre a partícula ***P***.

c) A equação do movimento da partícula ***P*** usando o método de *Langrange*.

d) O momento ***M*** que sustenta a velocidade angular $\dot{q} = w_o = cte$.



Resolução:

Coordenadas generalizadas $q_1 = r$ e $q_2 = q$.

Posição angular da partícula $q = q_o + w_o T$

Velocidade do ponto material $\vec{V}_p = \dot{r}\,\vec{u} + r\dot{q}\,\vec{t}$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_p^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{q}^2) \quad (0{,}5) \quad \text{e} \quad V = 0 \quad (0{,}5)$$

Para a coordenada $q_1 = r$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{q}^2$$

Força generalizada sobre a partícula ***P***

$$dW = N\vec{t} \cdot (d\,r\,\vec{u} + r\,dq\,\vec{t}) \quad \rightarrow \quad d\,W = Q_1\,d\,q_1 \quad \rightarrow \quad Nr\,dq = Q_1\,d\,q_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{Q_1 = 0} \ (0{,}5)$$

Resulta na equação diferencial: $\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{q}^2 = 0}$ (0,5)

Para identificação do momento mantenedor da velocidade angular, toma-se o conjunto massa + disco usando $q_1 = r$ e $q_2 = q$

$$T = \frac{1}{2} m\,V_P^2 + \frac{1}{2} J_z w^2 \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2 w^2) + \frac{1}{2} J_z w^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\,r^2 w + J_z w = (mr^2 + J_z)w \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \left(m\,r^2 + \frac{4mR^2}{2}\right)\dot{w} + 2\,m\,r\,\dot{r}\,\dot{q} \quad (0{,}5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

Força generalizada $\quad d\,W = M\,dq = Q_2\,d\,q_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{Q_2 = M}$ (0,5)

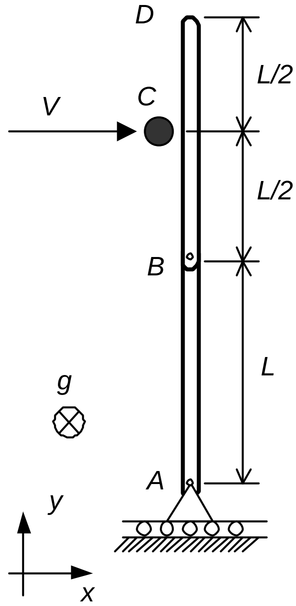
$$m\left(r^2 + 2R^2\right)\ddot{q} + 2\,m\,r\,\dot{r}\dot{q} = M \quad \rightarrow \quad \text{para } \dot{q} = w = cte \Rightarrow \ddot{q} = O \quad \rightarrow \quad \boxed{M = 2\,m\,r\,\dot{r}\dot{q}} \quad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos)



O sistema mostrado na figura ao lado é composto por duas barras articuladas em ***B***, cada uma com massa ***m*** e comprimento ***L***, e está em repouso sobre um plano horizontal. Em um dado instante uma esfera de massa ***m*** e dimensões desprezíveis, atinge o ponto ***C*** com velocidade $\vec{V}$ ortogonal à barra ***BD***. Sabendo que o choque foi totalmente anelástico, determine o vetor de rotação da barra ***BD*** no instante imediatamente após o choque. Desprezar as forças de atrito.

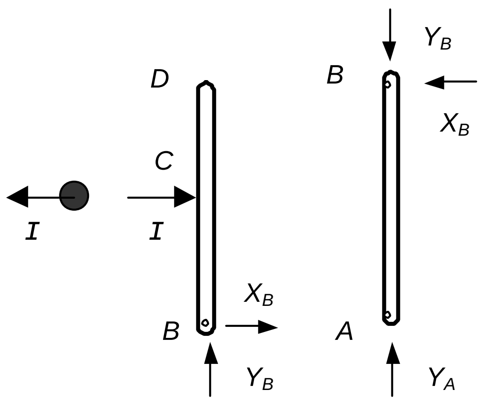
Considerando o baricentro de cada barra $G_1 = G_{AB}$ e $G_2 = G_{BD}$

$$\vec{V}'_{G1} = \vec{V}_A + \vec{w}'_1 \wedge (G_1 - A) = (w'_1 L/2)\vec{i}$$

$$\vec{V}'_B = w'_1 L \vec{i}$$

$$\vec{V}'_C = \vec{V}'_B + \vec{w}'_2 \wedge (C - B) = w'_1 L\vec{i} + w'_2 \frac{L}{2}\vec{i} = \left(w'_1 + \frac{w'_2}{2}\right) L\vec{i}$$

$$\vec{w}'_2 = -w'_2 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{w}'_1 = -w'_1 \vec{k} \qquad (0.5)$$



Barra BD Barra AB

TMI: na barra $\overline{BD}$

$$m(C-B)\wedge\vec{V}'_C + m(C-B)\wedge\vec{V}'_B - \frac{m}{3}l^2 w'_2 \vec{k} = m(C-B)\wedge\vec{V}_C$$

$$m\frac{L}{2}\vec{j}\wedge\left(w'_1 + \frac{w'_2}{2}\right)L\vec{i} + m\frac{L}{2}\vec{j}\wedge w'_1 L\vec{i} - \frac{mL^2}{3}w'_2\vec{k} = m\frac{L}{2}\vec{j}\wedge V\vec{i}$$

$$-\frac{1}{2}\left(w'_1 + \frac{w'_2}{2}\right)L\vec{k} - w'_1\frac{L}{2}\vec{k} - \frac{L}{3}w'_2\vec{k} = -\frac{V}{2}\vec{k}$$

$$\boxed{w'_1 L + \frac{7}{12}w'_2 L = \frac{V}{2}} \qquad (1) \qquad (0,5)$$

TRI esfera: $-I = m(V'_c - V)$ $\quad -I = m w'_1 L + m w'_2 \frac{L}{2} - \overline{V}$

$$\boxed{I = m\left(V - \left(w'_1 + \frac{w'_2}{2}\right)L\right)} \qquad (2) \qquad (0.5)$$

TRI: $\overline{BD}$: $I - X_B = m(V'_c - V_c)$ $\quad \boxed{I - X_B = mL\left(w'_1 + \frac{w'_2}{2}\right)}$ $\quad (0.5)$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

TMI: $\overline{AB}$: $-m\frac{L^2}{3}w_1'=-X_3 L$ $\boxed{X_B=m\frac{L}{3}w_1'}$ (3) (0,5)

$I=m\frac{L}{3}w_1'+mLw_1'+m\frac{L}{2}w_2'$ $\boxed{I=\frac{4}{3}mLw_1'+\frac{1}{2}mLw_2'}$ (4)

Fazendo (2) ≡ (4) $\frac{4}{3}mLw_1'+\frac{1}{2}m\,Lw_2'+mLw_1'+\frac{1}{2}mLw_2'=mV$

$\boxed{\frac{7}{3}w_1'+w_2'=V/L}$ (5) (0.5)

$$\begin{cases} w_1'\,L+\frac{7}{12}w_2'\,L=\frac{V}{2} & (1) \\ \frac{7}{3}w_1'\,L+w_2'\,L=V & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1'+\frac{7}{12}w_2'=\frac{1}{2}\frac{V}{L} & (a) \\ \frac{7}{3}w_1'\,L+w_2'=V/L & (b) \end{cases}$$

(a) - $\frac{7}{12}(b)$: $\left(1-\frac{49}{36}\right)w_1'=\frac{V}{L}\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{12}\right)$ $+\frac{13}{36}w_1'=+\frac{V}{L}\frac{1}{12}$

$\boxed{w_1'=\frac{3}{13}\frac{V}{L}}$

$w_2'=\frac{V}{L}\left(1-\frac{7}{13}\right)=\frac{6}{13}\frac{V}{L}$ $\boxed{w_2'=2w_1'=\frac{6}{13}\frac{V}{L}}$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão EMSC#3 (3,0 pontos)

(a) Definindo $?_1$ como sendo o comprimento da mola na parte traseira do veículo e $?_2$ como sendo o comprimento da mola na parte dianteira do veículo, tem-se que:

$$l_1 = l_o + Y_O - \frac{L}{2} sen a - r_1\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2p}{L_2}Vt\right)\right)\right] \quad \text{e}$$

$$l_2 = l_o + Y_O + \frac{L}{2} sen a - r_2\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2p}{L_2}Vt\right)\right)\right]$$

onde

$$r_1 = \begin{cases} 0 \; se \; Vt \le L_1 \\ 1 \; se \; L_1 < Vt < L_2 + L_1 \\ 0 \; se \; Vt \ge L_2 + L_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 = \begin{cases} 0 \; se \; Vt \le L_1 + L \\ 1 \; se \; L_1 + L < Vt < L_2 + L_1 + L \\ 0 \; se \; Vt \ge L_2 + L_1 + L \end{cases}$$

Energia potencial:

$$V = V_{Grav} + V_{El}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &V = MgY_o + m_1 g\left(Y_O - d_1 \,\mathrm{sen} a\right) + m_2 g\left(Y_O + d_2 \,\mathrm{sen} a\right) + \\ &\frac{1}{2}k_1\left\{Y_O - \frac{L}{2}\mathrm{sen} a - r_1\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2p}{L_2}Vt\right)\right)\right]\right\}^2 + \frac{1}{2}k_2\left\{Y_O + \frac{L}{2}\mathrm{sen} a - r_1\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2p}{L_2}Vt\right)\right)\right]\right\}^2 \end{aligned}} \quad (1{,}0)$$

(b) Pela figura nota-se que a coordenada generalizada em análise, o ângulo de arfagem a, estabiliza-se em um valor menor que zero. Isso significa que, na condição mostrada na figura, os valores de k_1 e k_2 eram diferentes, sendo $k_1 > k_2$. Trata-se de resposta obtida com as condições do item "i" do EMSC número 3. (1,0)

(c) O índice de desconforto do motorista diminuiu quando o posicionamento das massas concentradas m_1 e m_2 foi alterado de $d_1 = d_2 = 2{,}5$ m para $d_1 = 0{,}5$ m e $d_2 = 2{,}5$ m. (1,0)