ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

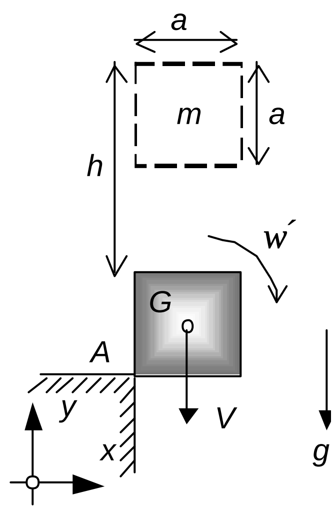
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 03 de julho de 2007

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos)

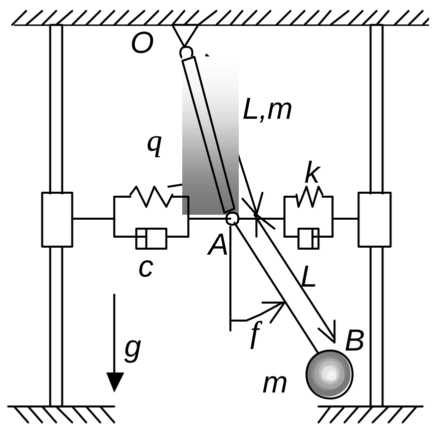


Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, cai de uma altura h, quando se choca com a aresta ***A***. Considerando o choque na aresta ***A*** perfeitamente anelástico (***e*** = 0) sem perda de contato e que a velocidade inicial é nula, determine:

a) a velocidade $\boldsymbol{V_G}$ do cubo, imediatamente antes do choque;
b) a velocidade $\boldsymbol{V_G}´$ do cubo, imediatamente depois do choque;
c) a velocidade angular do cubo *w´*, imediatamente após o choque;
d) a energia cinética do cubo no instante imediatamente após o choque

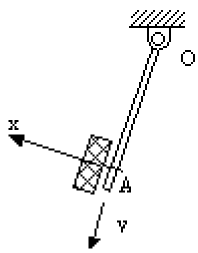
Dado: $\boldsymbol{J}_{ZG} = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{a}^2 / 6$

2ª Questão (4,0 pontos)



Um pêndulo duplo, composto por uma barra de comprimento ***L*** e massa ***m***, está articulado em ***O***. O segundo pêndulo está articulado na extremidade ***A*** do primeiro, tem uma massa ***m*** concentrada na sua extremidade ***B*** (comprimento ***L***). Na articulação ***A*** estão fixados dois conjuntos mola/amortecedor idênticos (constante elástica ***k*** e amortecimento viscoso linear de constante ***c***). Os conjuntos permanecem na horizontal, conforme mostrado na figura. Sabendo que as molas não estão estendidas quanto q = 0, determine as equações de movimento para as coordenadas q e f, utilizando o método de *Lagrange*.

3ª Questão (3,0 pontos)



O esquema de um trem de pouso, de roda única, de um avião está mostrado na figura. A roda, homogênea com massa m e raio ***R***, gira em torno do eixo Ax com velocidade angular W = -Ω**i** , sendo Ω constante. A barra AO gira em torno de O com velocidade angular w = -ω**k** , sendo ω constante. Dados J_{Ax}, J_{Ay} e J_{Az} , da roda. Sendo Ax, Ay e Az os eixos principais de inércia da roda, e admitindo que a distância entre o baricentro da roda e o ponto A desprezível, determinar:

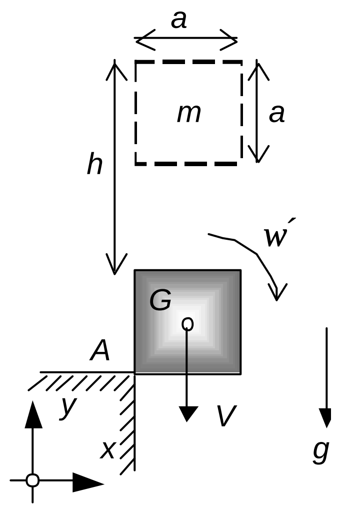
a) o vetor de rotação absoluto w_{abs} da roda e o seu momento angular em relação ao pólo A;
b) obter a expressão do momento **M** aplicado na barra AO.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª Questão (3,0 pontos)



Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, cai de uma altura h, quando se choca com a aresta ***A***. Considerando o choque na aresta ***A*** perfeitamente anelástico (***e*** = 0) sem perda de contato e que a velocidade inicial é nula, determine:

Dado: $J_{ZG} = m\,a^2 / 6$

a) a velocidade V_G do cubo, imediatamente antes do choque; Usando o TEC

$\Delta E = \tau \rightarrow 1/2m(V_G^2 - V_h^2) = mgh \rightarrow V_G = \sqrt{2gh}$ ou $\vec{V}_G = -\sqrt{2gh}\,\vec{j}$ **0,5**

c) a velocidade angular do cubo w', imediatamente após o choque;

TMI - $D\vec{H} = \vec{M}_{ext}$ escolhendo o ponto A

$\vec{H}'_A - \vec{H}_A = \vec{M}_A$ onde $\vec{M}_A = 0$

$\vec{H}'_A = m(G-A)\wedge\vec{V}'_A + J_{zz}^A\vec{w}'$ $\quad \vec{H}'_A = J_{zz}^A w'\vec{k}$ pois $\vec{V}'_A = 0$ **0,5**

$\vec{H}_A = m(G-A)\wedge\vec{V}_A + J_{zz}^A\vec{w}$ $\quad \vec{H}_A = m\left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right)\wedge V_A\,\vec{i}$ $\quad \vec{H}_A = -\frac{a}{2}mV_A\,\vec{k}$ pois $w = 0$ **0,5**

$J_{zz}^A\vec{w}' = -\frac{a}{2}m\vec{V}_A$ onde $J_{zz}^A = J_{zz}^G + md^2$ $\quad J_{zz}^A = \frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2$ **0,5**

$\boxed{w' = -\frac{3\sqrt{2gh}}{4a}}$ ou $\boxed{\vec{w}' = -\frac{3\sqrt{2gh}}{4a}\vec{k}}$ **0,5 (pelos resultados de w' e V_G')**

b) a velocidade ***V´*** do cubo, imediatamente depois do choque;

$\vec{V}'_G = \vec{V}'_A + \vec{w}'\wedge(G-A) \rightarrow \vec{V}'_G = 0 - \frac{3\sqrt{2gh}}{4a}\vec{k}\wedge\left(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}\right) \rightarrow \vec{V}'_G = \frac{3\sqrt{2gh}}{8}(\vec{i} - \vec{j})$

d) a energia cinética do cubo no instante imediatamente após o choque

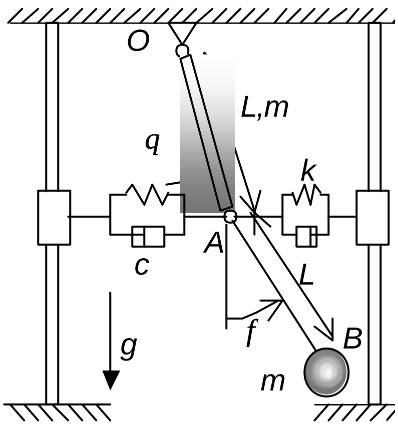
$T = \frac{1}{2}mV'^2_A + \frac{1}{2}J_{zz}^A w'^2$ $\quad T = 0 + \frac{2}{6}ma^2\left(\frac{3\sqrt{2gh}}{4a}\right)^2$ $\quad \boxed{T = \frac{3}{8}mgh}$ **0,5**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (4,0 pontos)



Um pêndulo duplo, composto por uma barra de comprimento ***L*** e massa ***m***, está articulado em ***O***. O segundo pêndulo está articulado na extremidade ***A*** do primeiro, tem uma massa ***m*** concentrada na sua extremidade ***B*** (comprimento ***L***). Na articulação ***A*** estão fixados dois conjuntos mola/amortecedor idênticos (constante elástica ***k*** e amortecimento viscoso linear de constante ***c***). Os conjuntos permanecem na horizontal, conforme mostrado na figura. Sabendo que as molas não estão estendidas quanto $q = 0$, determine as equações de movimento para as coordenadas q e f, utilizando o método de *Lagrange*.

- Energia Cinética:

$E = E_{barra} + E_{massa}$

$$E_{barra} = \frac{1}{2} m V_O^2 + m\vec{V}_O.[\vec{w} \wedge (G-O)] + \frac{1}{2}\{w\}^t [I_O]\{w\} \;\rightarrow\; E_{barra} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{q}^2$$

$$E_{massa} = \frac{1}{2} m V_B^2 \text{ , onde } \vec{V}_B = \vec{V}_A + \dot{f}\vec{k} \wedge (B-A) \text{ e } \vec{V}_A = \vec{V}_O + \dot{q}\vec{k} \wedge (A-O)$$

$$\rightarrow \vec{V}_A = \dot{q}L\cos q\vec{i} + \dot{q}L sen q\vec{j} \qquad \rightarrow \vec{V}_B = L(\dot{q}\cos q + \dot{f}\cos f)\vec{i} + L(\dot{q} sen q + \dot{f} sen f)\vec{j}$$

$$E_{massa} = \frac{1}{2} mL^2 \left[\dot{q}^2 + \dot{f}^2 + \dot{q}\dot{f}\cos(q-f)\right]$$

$$\rightarrow E = \frac{mL^2\dot{q}^2}{6} + \frac{1}{2} mL^2 \left[\dot{q}^2 + \dot{f}^2 + \dot{q}\dot{f}\cos(q-f)\right] \qquad \textbf{1,5}$$

- Energia Potencial:

$$V = mg\frac{L}{2}(1-\cos q) + mg(2L - L\cos q - L\cos f) + \frac{k}{2}(L sen q)^2 + \frac{k}{2}(L sen q)^2$$

$$\rightarrow V = mg\left(\frac{5L}{2} - \frac{3L}{2}\cos q - L\cos f\right) + k(L sen q)^2 \qquad \textbf{1,0}$$

$$L = E - V = \frac{mL^2\dot{q}^2}{6} + \frac{1}{2} mL^2\left[\dot{q}^2 + \dot{f}^2 + \dot{q}\dot{f}\cos(q-f)\right] - mg\left(\frac{5L}{2} - \frac{3L}{2}\cos q - L\cos f\right) - k(L sen q)^2$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

- Função de Dissipação de Rayleigh

$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c\dot{x}^2$, onde $x = Lsenq \quad \rightarrow \dot{x} = L\cos q\dot{q}$

$\rightarrow R = cL\cos^2 q\dot{q}^2$ **0,5**

- Forças Generalizadas

Nesse caso, $Q_q = Q_f = 0$

- Equações de Lagrange

<u>Coordenada θ:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{mL^2\dot{q}}{3} + mL^2\dot{q} + \frac{mL^2}{2}\dot{f}\cos(q-f)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{4mL^2\ddot{q}}{3} + \frac{mL^2}{2}\ddot{f}\cos(q-f) - \frac{mL^2}{2}\dot{f}sen(q-f)(\dot{q}-\dot{f})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{mL^2}{2}\dot{q}\dot{f}sen(q-f) - \frac{3Lmg}{2}senq - 2kL^2 senq\cos q \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 2cL^2\cos^2 q\dot{q}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{4mL^2\ddot{q}}{3} + \frac{mL^2}{2}\ddot{f}\cos(q-f) + \frac{mL^2}{2}\dot{f}^2 sen(q-f) + \frac{3Lmg}{2}senq + 2kL^2 senq\cos q + 2cL^2\cos^2 q\dot{q} = 0}$$

0,5

<u>Coordenada ϕ:</u>

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{f}} = mL^2\dot{f} + \frac{mL^2}{2}\dot{q}\cos(q-f) \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = mL\ddot{f} + \frac{mL^2}{2}\ddot{q}\cos(q-f) - \frac{mL^2}{2}\dot{q}sen(q-f)(\dot{q}-\dot{f})$$

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{mL^2}{2}\dot{q}\dot{f}sen(q-f) - mgLsenf \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{f}} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{mL^2\ddot{f} + \frac{mL^2}{2}\ddot{q}\cos(q-f) - \frac{mL^2}{2}\dot{q}^2 sen(q-f) + mgLsenf = 0}$$

0,5

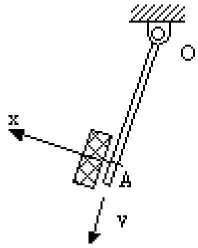
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)

O esquema de um trem de pouso, de roda única, de um avião está mostrado na figura. A roda, homogênea com massa m e raio ***R***, gira em torno do eixo Ax com velocidade angular W = -Ω**i** , sendo Ω constante. A barra AO gira em torno de O com velocidade angular w = -ω**k** , sendo ω constante. Dados J_{Ax}, J_{Ay} e J_{Az} , da roda. Sendo Ax, Ay e Az os eixos principais de inércia da roda, e admitindo que a distância entre o baricentro da roda e o ponto A desprezível, determinar:



a) o vetor de rotação absoluto w_{abs} da roda e o seu momento angular em relação ao pólo A;

$$\boxed{\vec{w}_{abs} = -W\vec{i} - w\vec{k}} \qquad \textbf{0,5}$$

$$\boxed{\vec{H}_A = m(G-A)\wedge\vec{V}_A + [I_A]\{\vec{w}_{abs}\} = -J_{Ax}\Omega\vec{i} - J_{Az}w\vec{k}} \qquad \textbf{1,0}$$

b) obter a expressão do momento **M** aplicado na barra AO.

$\dot{\vec{H}}_A = -J_{Ax}\Omega\dot{\vec{i}}$, onde $\dot{\vec{i}} = w\vec{k}\wedge\vec{i}$

$\rightarrow \dot{\vec{H}}_A = J_{Ax}w\Omega\vec{j} = \vec{M}_A$ (na roda) **1,0**

na Barra OA: $\boxed{\vec{M}_A = -J_{Ax}w\Omega\vec{j}}$ **0,5**