ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

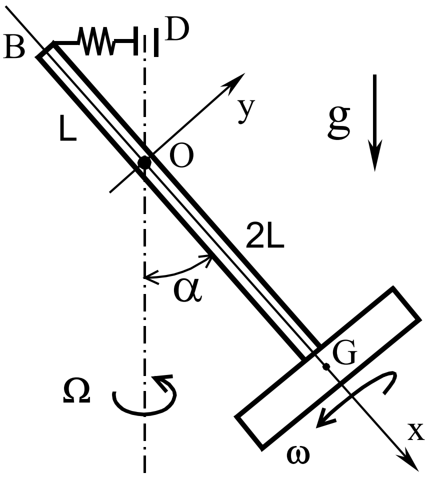
PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 04 de julho de 2006

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos)

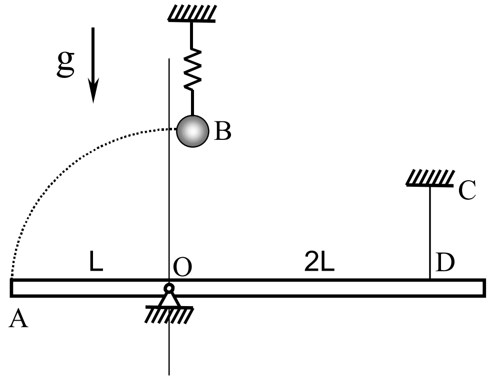
A figura mostra um disco homogêneo de raio *R* e peso *mg* acoplado a uma barra *GB* de comprimento *3L* e massa desprezível. O disco gira com velocidade angular ω constante, em torno da barra *GB*. O conjunto gira em torno do eixo vertical com velocidade angular Ω constante. O ponto *O* permanece fixo e a mola *BD* permanece sempre horizontal. O sistema de coordenadas (*O, x, y, z*) é solidário à barra *GB*. Pede-se, para α constante e expressando as respostas no sistema de coordenadas dado:

(a) O vetor de rotação absoluto do disco;
(b) O momento que o disco aplica sobre a barra *GB;*
(c) A força na mola *BD*.



2ª Questão (3,0 pontos)

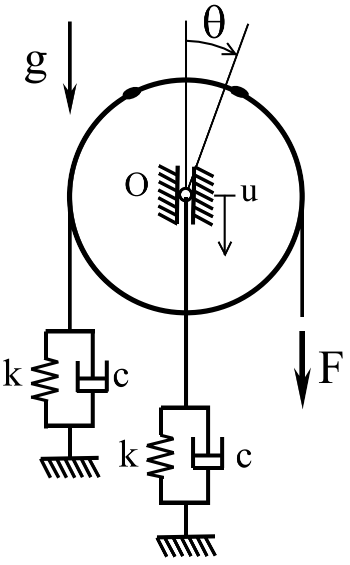
A barra de massa *m* e comprimento *3L* encontra-se inicialmente em repouso, como indicado na figura. Em um dado instante, o fio *CD* é cortado, fazendo com que a barra gire e, posteriormente, choque sua extremidade *A* com a esfera *B* de massa *M*. Sabendo que o choque entre a barra e a esfera é perfeitamente anelástico, determine o vetor de rotação ω' da barra imediatamente após o choque.



3ª Questão (3,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, o disco possui massa *M* e raio *R*. O centro *O* do disco pode movimentar-se apenas na direção *u* e está acoplado a uma mola de rigidez *k* e a um amortecedor viscoso linear de constante *c*. A periferia do disco está ligada a uma superfície fixa, por meio de uma segunda mola de rigidez *k* e um segundo amortecedor viscoso linear de constante *c*. Uma força vertical *F* atua em um fio acoplado ao disco. Utilizando as coordenadas generalizadas *u* e θ, e assumindo que as molas têm deformação nula quando as coordenadas *u* e θ valem zero, determine:

(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) A função dissipativa de *Rayleigh* do sistema
(d) As equações de movimento para as coordenadas *u* e θ, usando o método de *Lagrange*.

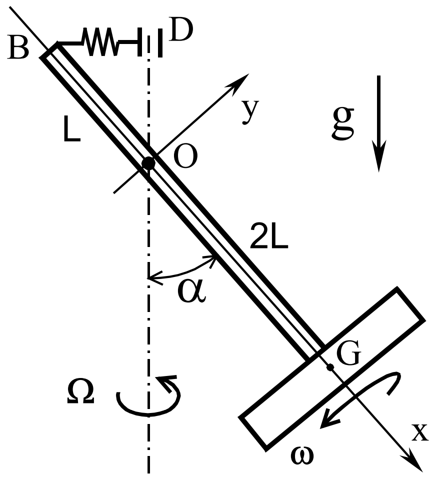


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª Questão (4,0 pontos)

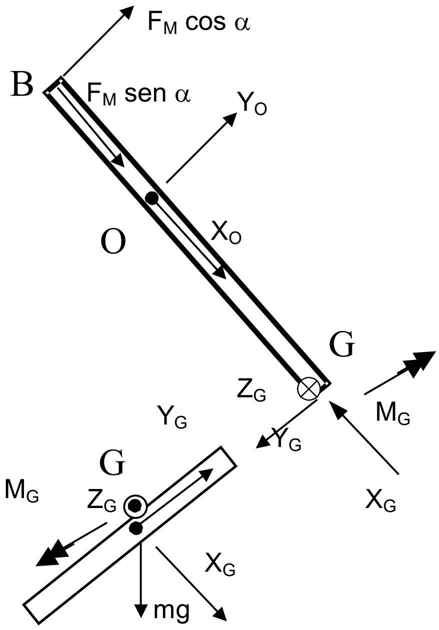


A figura mostra um disco homogêneo de raio *R* e peso *mg* acoplado a uma barra *GB* de comprimento *3L* e massa desprezível. O disco gira com velocidade angular ω constante, em torno da barra *GB*. O conjunto gira em torno do eixo vertical com velocidade angular Ω constante. O ponto *O* permanece fixo e a mola *BD* permanece sempre horizontal. O sistema de coordenadas (*O, x, y, z*) é solidário à barra *GB*. Pede-se, para α constante e expressando as respostas no sistema de coordenadas dado:

(a) O vetor de rotação absoluto do disco;

$$\vec{\Omega}_{abs} = \vec{\Omega}_{rel} + \vec{\Omega}_{arr} \qquad \vec{\Omega}_{abs} = \omega\,\vec{i} - \Omega\cos\alpha\,\vec{i} + \Omega\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{abs} = (\omega - \Omega\cos\alpha)\,\vec{i} + \Omega\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{j}} \qquad (1{,}0)$$



Aceleração do baricentro *G*

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (G-O) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (G-O)]$$

$$\vec{a}_G = 0 + 0 + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (2L\,\vec{i})]$$

$$\boxed{\vec{a}_G = 2L\Omega^2(-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\vec{j} - \mathrm{sen}^2\,\alpha\,\vec{i})} \qquad (0{,}5)$$

Aplicando o TMB no disco (ver DCL ao lado)

$$2mL\Omega^2(-\mathrm{sen}^2\,\alpha) = X_G + mg\cos\alpha$$

$$2mL\Omega^2(-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha) = Y_G - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$0 = Z_G$$

$$\boxed{X_G = -2mL\Omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - mg\cos\alpha}$$

$$\boxed{Y_G = -2mL\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha} \qquad (0{,}5)$$

(b) O momento que o disco aplica sobre a barra *GB;*

Aplicando o TMA no pólo *G* do disco

$$\vec{H}_O = (G-O) \wedge m\vec{V}_O + [I_O]\{\omega\}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{H}_G = (G-G) \wedge m\vec{V}_G + \begin{bmatrix} mR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega - \Omega\cos\alpha \\ \Omega \operatorname{sen}\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{H}_G = (\omega - \Omega\cos\alpha) mR^2/2\,\vec{i} + \Omega \operatorname{sen}\alpha\, mR^2/4\,\vec{j}} \qquad (0,5)$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} = (-\Omega\cos\alpha\,\vec{i} + \Omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}) \wedge \vec{i} = -\Omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec{k}$$
$$\dot{\vec{j}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} = (-\Omega\cos\alpha\,\vec{i} + \Omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}) \wedge \vec{j} = -\Omega\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = (\omega - \Omega\cos\alpha)(-\Omega\operatorname{sen}\alpha) mR^2/2\,\vec{k} + \Omega\operatorname{sen}\alpha\,(-\Omega\cos\alpha) mR^2/4\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = mR^2[(-\Omega\omega\operatorname{sen}\alpha/2) + (\Omega^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha/4)]\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = m(\vec{V}_G \wedge \vec{V}_G) + \vec{M}_G$$

$$\boxed{\vec{M}_G = mR^2[(-\Omega\omega\operatorname{sen}\alpha/2) + (\Omega^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha/4)]\vec{k}} \qquad (0,5)$$

(c) A força na mola *BD*. Considerando o momento angular da barra em relação ao pólo O

$$\vec{H}_O = 0$$

$$\dot{\vec{H}}_O = 0(\vec{V}_G \wedge \vec{V}_O) + \vec{M}_O$$
$$\boxed{\dot{\vec{H}}_O = -F_m\cos\alpha\, L - 2LY_G - \vec{M} = 0} \qquad (0,5)$$

$$\boxed{F_m = 2mg\tan\alpha - 4mL\Omega^2\operatorname{sen}\alpha - \frac{mR^2}{L\cos\alpha}[(-\Omega\omega\operatorname{sen}\alpha/2) + (\Omega^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha/4)]} \qquad (0,5)$$

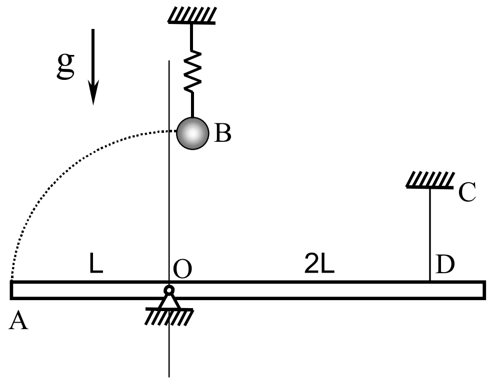
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos)

A barra de massa m e comprimento 3L encontra-se inicialmente em repouso, como indicado na figura. Em um dado instante, o fio CD é cortado, fazendo com que a barra gire e, posteriormente, choque sua extremidade A com a esfera B de massa M. Sabendo que o choque entre a barra e a esfera é perfeitamente anelástico, determine o vetor de rotação ω' da barra imediatamente após o choque.



$T + V = 0$ $\qquad V = mgL/2$ $\qquad T = \frac{1}{2}\omega^2 J_o$ (0,5)

$$J_O = J_G + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m(3L)^2 + \frac{1}{4}mL^2 = mL^2$$

$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mL^2\omega^2$ $\qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$ (0,5)

TMI com pólo em O (1,0)

$J_O\omega = J_O\omega' + MV_B'L$ $\qquad mL^2\omega = mL^2\omega' + MV_B'L$ $\qquad mL^2(\omega - \omega') = MV_B'L$

$V_B' = V_A' = \omega' L$ (0,5)

$mL^2(\omega - \omega') = ML^2\omega'$ $\qquad m\omega = (M + m)\omega'$

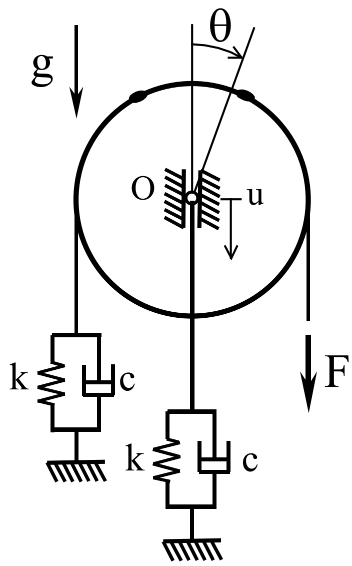
$\boxed{\omega' = \frac{m}{(M+m)}\sqrt{\frac{g}{L}}}$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)



No sistema mostrado na figura, o disco possui massa *M* e raio *R*. O centro *O* do disco pode movimentar-se apenas na direção *u* e está acoplado a uma mola de rigidez *k* e a um amortecedor viscoso linear de constante *c*. A periferia do disco está ligada a uma superfície fixa, por meio de uma segunda mola de rigidez *k* e um segundo amortecedor viscoso linear de constante *c*. Uma força vertical *F* atua em um fio acoplado ao disco. Utilizando as coordenadas generalizadas u e θ, e assumindo que as molas têm deformação nula quando as coordenadas u e θ valem zero, determine:

(a) A energia cinética do sistema.

$$T = \frac{1}{2} M\,\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 \qquad (1{,}0)$$

(b) A energia potencial do sistema.

$$V = \frac{1}{2} k (R\theta - u)^2 + \frac{1}{2} k\,u^2 + Mg\,u \qquad (1{,}0)$$

(c) A função dissipativa de *Rayleigh* do sistema

$$R = \frac{1}{2} c (R\dot{\theta} - \dot{u})^2 + \frac{1}{2} c\,\dot{u}^2 \qquad (0.5)$$

Forças generalizadas:

$$\delta W = F\delta x \qquad x = R\theta - u \qquad \dot{x} = R\dot{\theta} - \dot{u}$$

$$Q_u = F\frac{\partial x}{\partial u} = F$$

$$Q_\theta = F\frac{\partial x}{\partial \theta} = FR$$

(d) As equações de movimento para as coordenadas ***u*** e ***θ***, usando o método de *Lagrange*.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Para a coordenada ***u*** tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) = M\ddot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -kR\theta + 2ku + Mg$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = -c(R\dot{\theta} - \dot{u}) + c\dot{u} = 2c\dot{u} - cR\dot{\theta}$$

$$\boxed{M\ddot{u} - kR\theta + 2k\,u + 2c\,\dot{u} - cR\dot{\theta} + Mg = F}$$

Para a coordenada $\boldsymbol{\theta}$ tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{k}{2}(2R^2\theta - 2Ru)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = cR^2\theta - cRu$$

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + kR^2\theta - kR\,u + cR^2\dot{\theta} - cR\,\dot{u} = FR}$$

(0.5) para as 2 equações e forças generalizadas

Na forma matricial:

$$M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 & -R \\ -R & R^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -R \\ -R & R^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F - Mg \\ FR \end{Bmatrix}$$