ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

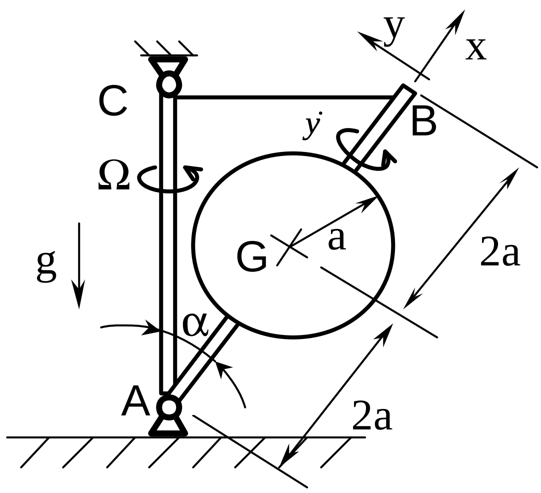
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 08 de julho de 2004

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos)

Uma esfera homogênea de raio **a** e massa **m** está presa a uma barra **AB** de comprimento **4a** e massa desprezível. A barra **AB** está presa à corda **BC**, forma um ângulo a (constante) com a vertical e gira em torno do eixo **AC** com velocidade angular constante $\Omega = \sqrt{g/a}$. A esfera gira em torno da barra **AB** com velocidade angular constante $\dot{y}$. Utilizando a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, solidária à barra **AB**, determine:



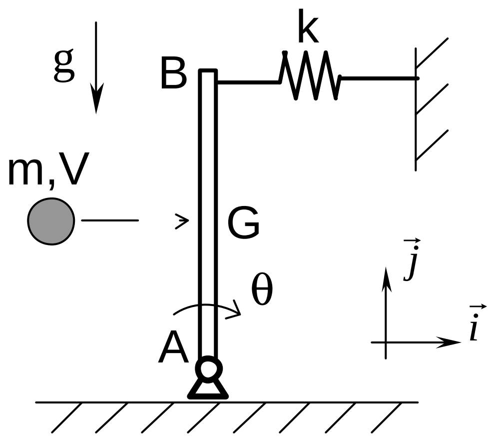
(a) O vetor de rotação absoluto da esfera
(b) Aplique o TMA e determine a tração **F** na corda **BC**

Dado: Momento de inércia da esfera $J_{XG} = 2/5\ ma^2$

2ª Questão (3,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra **AB** encontra-se em repouso e tem comprimento **L** e massa **m**. A mola tem rigidez **k** e não apresenta deformação para a configuração mostrada. Em um dado instante, uma esfera de massa **m** atinge o baricentro da barra **AB** com velocidade $\vec{V} = V\vec{i}$, de maneira perfeitamente anelástica. Determine:

(a) O vetor de rotação $\dot{q}'\vec{k}$ da barra AB imediatamente após o choque.
(b) A perda de energia cinética no choque.



(Figura referente às Questões 2 e 3)

3ª Questão (3,0 pontos)

Determine a equação de movimento para o sistema mostrado na questão anterior, para instantes posteriores ao choque. Utilize o método de *Lagrange* e a coordenada θ, de rotação da barra AB em torno do pólo A.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

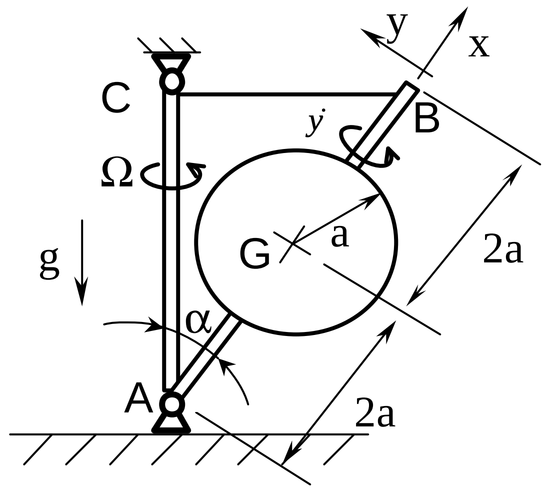
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 08 de julho de 2004

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos) Resolução

Uma esfera homogênea de raio **a** e massa **m** está presa a uma barra **AB** de comprimento **4a** e massa desprezível. A barra **AB** está presa à corda **BC**, forma um ângulo a (constante) com a vertical e gira em torno do eixo **AC** com velocidade angular constante $\Omega = \sqrt{g/a}$. A esfera gira em torno da barra **AB** com velocidade angular constante $\dot{y}$ **.** Utilizando a base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, solidária à barra **AB**, determine:



(c) O vetor de rotação absoluto da esfera
(d) Aplique o TMA e determine a tração **F** na corda **BC**

Dado: Momento de inércia da esfera $J_{XG} = 2/5\ ma^2$

$$\vec{W} = W\left(\cos a\ \vec{i} + \text{sen}\, a\ \vec{j}\right)$$

$$\vec{\dot{Y}} = \dot{Y}\ \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{w} = \left(\dot{Y} + W\cos a\right)\vec{i} + W\,\text{sen}\,a\ \vec{j}}$$

TMA pólo em A: $\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A$ $\qquad \overrightarrow{M}_A = \left\{F\left(4a\cos a\right) - mg\left(2a\,\text{sen}\,a\right)\right\}\vec{k}$

$$\vec{H}_A = J_{xA}\left(\dot{\Psi} + \Omega\cos a\right)\vec{i} + J_{yA}\Omega sen a\ \vec{j}$$

$$\dot{\vec{i}} = \Omega\left(\cos a\,\vec{i} + sen\,a\,\vec{j}\right)\wedge\vec{i} = -\Omega sen a\,\vec{k} \qquad \dot{\vec{j}} = \Omega\left(\cos a\,\vec{i} + sen\,a\,\vec{j}\right)\wedge\vec{j} = \Omega\cos a\,\vec{k}$$

$$J_{xA} = J_{xG} \quad ; \quad J_{yA} = J_{xG} + 4ma^2$$

$$\dot{\vec{H}}_A = \{J_{xA}\left(-\dot{Y}W\,\text{sen}\,a - W^2\,\text{sen}\,a\ \cos a\right) + J_{yA}W^2\,\text{sen}\,a\ \cos a\ \vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_A = \left(4ma^2W^2\,\text{sen}\,a\ \cos a - \frac{2ma^2}{5}\dot{Y}W\,\text{sen}\,a\right)\vec{k}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{4a\cos a}\left(2mag.sen a + 4ma^2\Omega^2 sen a.\cos a - \frac{2ma^2}{5}\dot{\Psi}\Omega.sen a\right)}$$

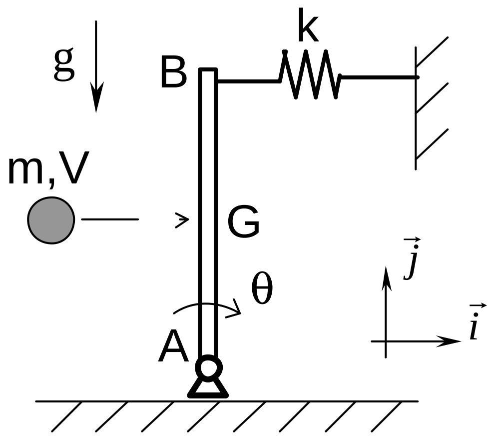
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra **AB** encontra-se em repouso e tem comprimento **L** e massa **m**. A mola tem rigidez **k** e não apresenta deformação para a configuração mostrada. Em um dado instante, uma esfera de massa **m** atinge o baricentro da barra **AB** com velocidade $\vec{V} = V\vec{i}$, de maneira perfeitamente anelástica. Determine:



(Figura referente às Questões 2 e 3)

(c) O vetor de rotação $\dot{q}'\vec{k}$ da barra AB imediatamente após o choque.
(d) A perda de energia cinética no choque.

Hipóteses:

Força na mola não tem caráter impulsivo

TMI pólo em A:

$$D\vec{H}_A = \vec{0} \qquad \vec{H}_{Af} = \vec{H}_{Ai}$$

$$\vec{H}_{Ai} = \frac{L}{2}\vec{j} \wedge mv\vec{i} = -\frac{mL}{2}v\vec{k}$$

$$\vec{H}_{Af} = \frac{L}{2}\vec{j} \wedge m\left(\dot{q}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + \frac{mL^2}{3}\dot{q}\left(-\vec{k}\right)$$

$$\vec{H}_{Af} = -\frac{mL}{4}\dot{q}\vec{k} - \frac{mL^2}{3}\dot{q}\vec{k} \quad ➔ \quad \vec{H}_{Af} = -\frac{7mL^2}{12}\dot{q}$$

$$-\frac{mL}{2}v = -\frac{7mL^2}{12}\dot{q} \quad ➔ \quad \boxed{\dot{q} = \frac{6v}{7L}}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{3v}{7}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\left(\frac{6v}{7L}\right)^2\right]$$

$$\Delta T = \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{2(49)} - \frac{12}{2(49)}\right]mv^2$$

$$\Delta T = \left(\frac{49-9-12}{98}\right)mv^2 \quad ➔ \quad \boxed{\Delta T = \frac{2}{7}mv^2}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

Determine a equação de movimento para o sistema mostrado na questão anterior, para instantes posteriores ao choque. Utilize o método de *Lagrange* e a coordenada θ, de rotação da barra AB em torno do pólo A.

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\theta} \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{L^2}{3} \left(\dot{\theta} \right)^2$$

$$T = \frac{mL^2}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{7mL^2}{24} \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} kL^2 sen^2\theta - 2mg \frac{L}{2} \left(1 - \cos\theta \right)$$

$$L = T - V = \frac{7mL^2}{24} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kL^2 sen^2\theta + 2mg \frac{L}{2} \left(1 - \cos\theta \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{7mL^2}{12} \dot{\theta} \quad ; \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{7mL^2}{12} \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL^2 sen\theta \cos\theta + mg sen\theta$$

$$\boxed{\frac{7mL^2}{12} \ddot{\theta} + kL^2 sen\theta \cos\theta - mg sen\theta = 0}$$