ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

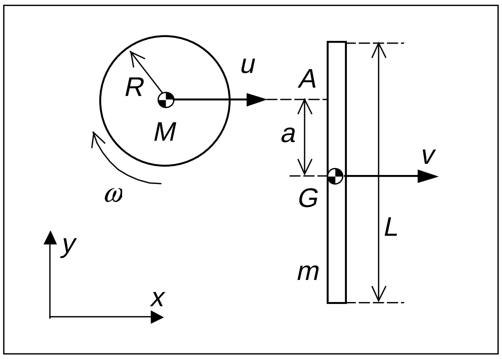
PME 2200 – MECÂNICA B – Prova Substitutiva – 01 de julho de 2003

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (4,0 pontos)

Sobre uma mesa horizontal plana, um disco de massa ***M*** e raio ***R***, movimenta-se apoiado sem atrito com velocidade $\vec{u} = u\vec{i}$ na direção *x* e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. A barra de massa ***m*** e comprimento ***L***, possui apenas velocidade de translação $\vec{v} = v\vec{i}$ tal que ***v*** < ***u***. A barra é atingida pelo disco no ponto **A**, distante ***a*** do seu baricentro ***G***, produzindo um choque sem atrito e de coeficiente de restituição ***e***. Considerando a hipótese de restituição de *Newton*.

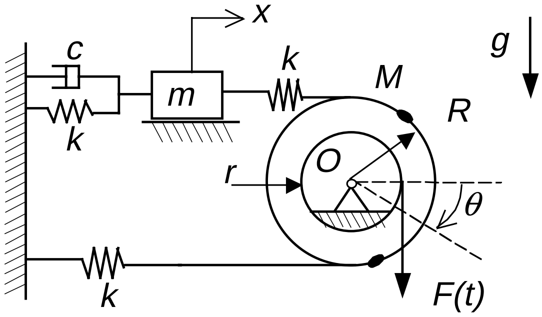
Pede-se formular o problema do choque, obtendo um sistema de equações nas incógnitas ***u´*** , ***v´***, ***ω´*** do disco e ***Ω´*** da barra após o choque, em função dos dados do problema (não é necessário resolver o sistema). Sugestão: aplique o TMI (teorema do momento dos impulsos) ao disco e à barra, o TRI (teorema do impulso) ao disco, à barra e ao sistema e a hipótese de restituição de Newton.



2ª Questão (4,0 pontos)

Um disco de raio ***R*** e massa ***M*** está articulado em ***O***. O bloco de massa ***m*** está apoiado sem atrito numa superfície horizontal, conforme mostrado na figura. O disco está ligado ao bloco e à base por duas molas de rigidez ***k***. O bloco também está ligado à base por uma mola e um amortecedor viscoso lineares de constantes ***k*** e ***c*** respectivamente. Um sistema hidráulico aplica sobre o disco uma força ***F***(t) = *F*o cosωt na vertical a uma distância ***r*** de ***O***. Faça o diagrama de corpo livre do sistema e considerando as coordenadas generalizadas ***x*** e ***θ***, independentes e suficientes para descrever os movimentos do sistema, determine:

a) a energia cinética **T** do sistema;
b) a energia potencial **V** do sistema;
c) a função dissipativa **R** (Rayleigh) do sistema;
d) a força generalizada $\mathbf{Q}_\theta$; associada a ***F***(t),
e) escreva as equações de movimento pelo método de *Lagrange* para as coordenadas ***x*** e ***θ***.;



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

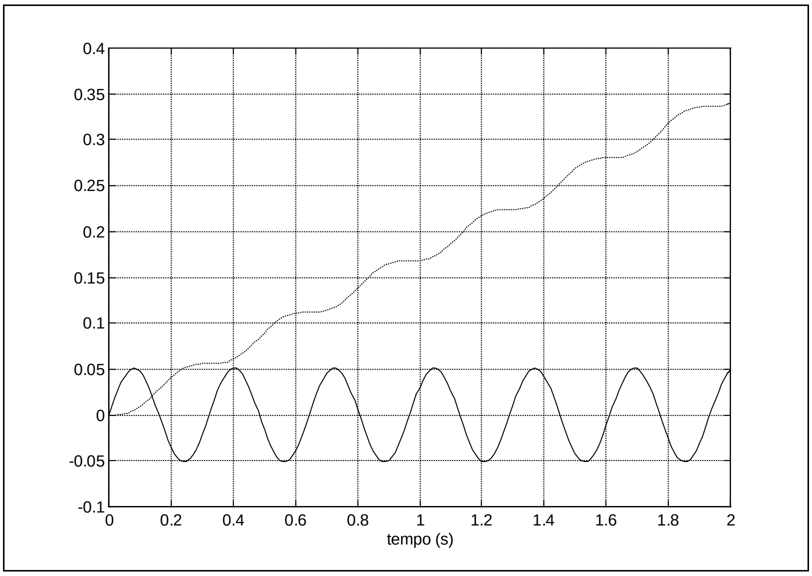
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (2,0 pontos)

Foi realizada uma simulação numérica baseada no Exercício Computacional 2, para uma relação entre a massa ***M*** do disco e ***m*** do pêndulo de $\alpha = M/m = 0{,}1$. Para as seguintes condições iniciais: $x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0;\ \theta(0) = 0;\ \dot{\theta}(0) = 1$ rad/s, adotadas para (t = 0), os resultados da translação ***x***(t) do disco e posição angular ***θ***(t) do pêndulo foram utilizados para desenhar, em função do tempo, o gráfico abaixo.

Identifique as linhas correspondentes a ***x***(t) e ***θ***(t) no gráfico, descrevendo o movimento do sistema, interpretando-o do ponto de vista físico e faça considerações a respeito de conservação de energia do sistema.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

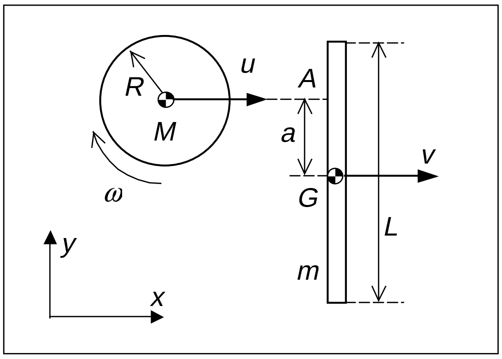
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

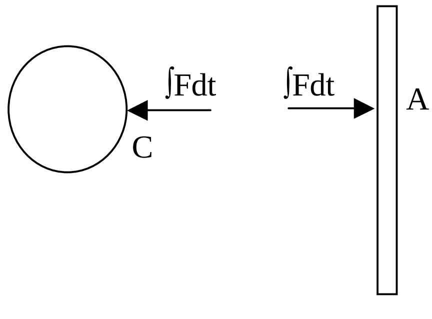
PME 2200 – MECÂNICA B – Resolução da Prova Substitutiva – 01/06/2003

1ª Questão - Resolução (4,0 pontos)

Sobre uma mesa horizontal plana, um disco de massa ***M*** e raio ***R***, movimenta-se apoiado sem atrito com velocidade $\vec{u} = u\vec{i}$ na direção *x* e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. A barra de massa ***m*** e comprimento ***L***, possui apenas velocidade de translação $\vec{v} = v\vec{i}$ tal que ***v*** < ***u***. A barra é atingida pelo disco no ponto **A**, distante ***a*** do seu baricentro ***G***, produzindo um choque sem atrito e de coeficiente de restituição ***e***. Considerando a hipótese de restituição de *Newton*, determine:



Pede-se formular o problema do choque, obtendo um sistema de equações nas incógnitas ***u´*** , ***v´***, ***ω´*** do disco e ***Ω´*** da barra após o choque, em função dos dados do problema (não é necessário resolver o sistema). Sugestão: aplique o TMI (teorema do momento dos impulsos) ao disco e à barra, o TRI (teorema do impulso) ao disco, à barra e ao sistema e a hipótese de restituição de Newton.
.



<u>Teorema do Impulso na barra</u>: O impulso sobre a barra é horizontal portanto não há variação de quantidade de movimento da barra na vertical e assim $\vec{v}' = v'\vec{i}$.

<u>Teorema do Impulso no disco</u>: O impulso sobre o disco é horizontal portanto não há variação de quantidade de movimento do disco na vertical e assim $\vec{u}' = u'\vec{i}$.

<u>Teorema do Impulso no sistema</u>: Não há impulso externo sobre o sistema portanto há conservação da quantidade de movimento do mesmo e usando os resultados acima:

$\boxed{Mu + mv = Mu' + mv'}$ (1) (1,0)

<u>Hipótese de Newton:</u> sendo “x” a direção da normal de choque, $v'_{Ax} - v'_{Cx} = e(v_{Cx} - v_{Ax})$

$$v_{Ax} = v$$

$$\vec{v}'_A = v'\vec{i} + \Omega'\vec{k} \wedge a\vec{j} = (v' - a\Omega')\vec{i} \Rightarrow v'_{Ax} = v' - a\Omega'$$

$$\vec{v}_C = u\vec{i} - \omega\vec{k} \wedge R\vec{i} = u\vec{i} - \omega R\vec{j} \Rightarrow v_{Cx} = u$$

$$\vec{v}'_C = u'\vec{i} - \omega'\vec{k} \wedge R\vec{i} = u'\vec{i} - \omega' R\vec{j} \Rightarrow v'_{Cx} = u'$$

$\boxed{v' - a\Omega' - u' = e(u - v)}$ (2) (1,0)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

<u>TMI no disco:</u> a linha de ação do impulso sobre o disco passa pelo seu baricentro, logo,

$\Delta\vec{H}_{Gdisco} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega' = \omega}$ (0,5)

Novamente aplicando o <u>Teorema do Impulso no disco</u>: $\vec{I} = \Delta\vec{Q} = M(u' - u)\vec{i}$ (0,5)

<u>TMI na barra:</u> $\Delta\vec{H}_{Gbarra} = (A - G) \wedge (-\vec{I})$

$\Rightarrow \Delta\vec{H}_{Gbarra} = a\vec{j} \wedge M(u - u')\vec{i} = aM(u' - u)\vec{k}$

$\vec{H}_{Gbarra,antes} = \vec{0} \quad , \quad \vec{H}_{Gbarra,depois} = \dfrac{mL^2}{12}\Omega'\vec{k}$

logo, $\boxed{\dfrac{mL^2}{12}\Omega' = Ma(u' - u)}$ (3) (1,0)

O sistema de equações (1), (2) e (3) nas incógnitas u', v' e Ω', resolve o problema.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

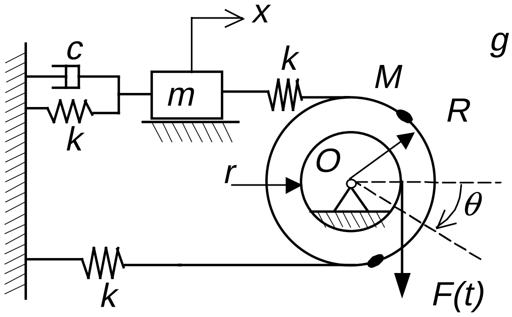
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão - Resolução (4,0 pontos)

Um disco de raio ***R*** e massa ***M*** está articulado em ***O***. O bloco de massa ***m*** está apoiado sem atrito numa superfície horizontal, conforme mostrado na figura. O disco está ligado ao bloco e à base por duas molas de rigidez ***k***. O bloco também está ligado à base por uma mola e um amortecedor viscoso lineares de constantes ***k*** e ***c*** respectivamente. Um sistema hidráulico aplica sobre o disco uma força ***F***(t) = *F*o cosω t na vertical a uma distância ***r*** de ***O***. Faça o diagrama de corpo livre do sistema e considerando as coordenadas generalizadas ***x*** e ***θ***, independentes e suficientes para descrever os movimentos do sistema, determine:

a) a energia cinética **T** do sistema;
b) a energia potencial **V** do sistema;
c) a função dissipativa **R** (Rayleigh) do sistema;
d) a força generalizada Q_θ; associada a ***F***(t),
e) escreva as equações de movimento pelo método de *Lagrange* para as coordenadas ***x*** e ***θ***.;



$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\theta}^2} \qquad \boxed{V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}k(R\theta)^2} \qquad \boxed{R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2} \qquad \text{(0,5 cada)}$$

$$x_j = r\theta \quad , \qquad Q_\theta = F(t)\frac{\partial x_j}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_\theta = F_0 r\cos\omega t} \qquad \text{(0,5)}$$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial x} = -kx + kR\theta - kx \quad , \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c\dot{x} \quad , \qquad Q_x = F(t)\frac{\partial x_j}{\partial x} = 0 \qquad \text{(0,5)}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + k(2x - R\theta) = 0} \qquad \text{(0,5)}$$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{\theta}} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{\theta}} = \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial \theta} = -kR^2\theta + kRx - kR^2\theta \quad , \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \qquad \text{(0,5)}$$

$$\boxed{\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + k(2R^2\theta - Rx) = F_0 r\cos\omega t} \qquad \text{(0,5)}$$

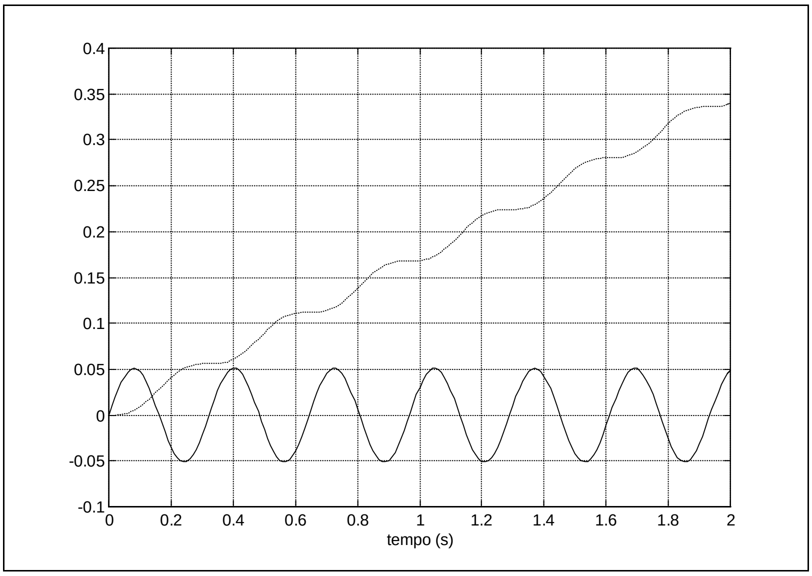
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão - Resolução (2,0 pontos)

Foi realizada uma simulação numérica baseada no Exercício Computacional 2, para uma relação entre a massa ***M*** do disco e ***m*** do pêndulo de $\alpha = M/m = 0{,}1$. Para as seguintes condições iniciais: $x(0)=0;\ \dot{x}(0)=0;\ \theta(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=1$ rad/s, adotadas para (t = 0), os resultados da translação ***x***(t) do disco e posição angular ***θ***(t) do pêndulo foram utilizados para desenhar, em função do tempo, o gráfico abaixo. Identifique as linhas correspondentes a ***x***(t) e ***θ***(t) no gráfico, descrevendo o movimento do sistema, interpretando-o do ponto de vista físico e faça considerações a respeito de conservação de energia do sistema.



Resolução:
A linha tracejada corresponde à coordenada generalizada ***x***(t) e linha contínua à ***θ***(t). (0,5).
O disco avança para a direita com movimento retilíneo uniforme superposto ao movimento periódico. Este movimento periódico é provocado pela oscilação do pêndulo. O avanço de translação do disco deve-se à condição inicial imposta à velocidade angular do pêndulo que transfere parte de sua energia cinética para o disco no início do movimento. (0,5).
Como o valor da massa da barra é muito superior ao valor da massa do disco a dinâmica é dominada pela barra. Se a massa do disco fosse muito superior à massa da barra poderia ocorrer do movimento do pêndulo ser composto por uma rotação de velocidade angular constante superposta a um movimento periódico. (0,5).
Como o sistema não é atuado por forças de natureza dissipativa a energia do sistema se conserva. (0,5).

Note que existe força de atrito entre o disco e plano, o que permite a hipótese de ausência de escorregamento. No entanto esta força não realiza trabalho.