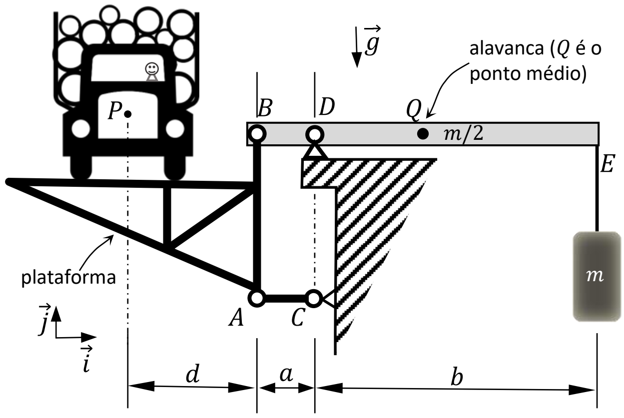
PME 3200 – MECÂNICA II – Terceira prova – 12 de julho de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido utilizar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (4,0 pontos)

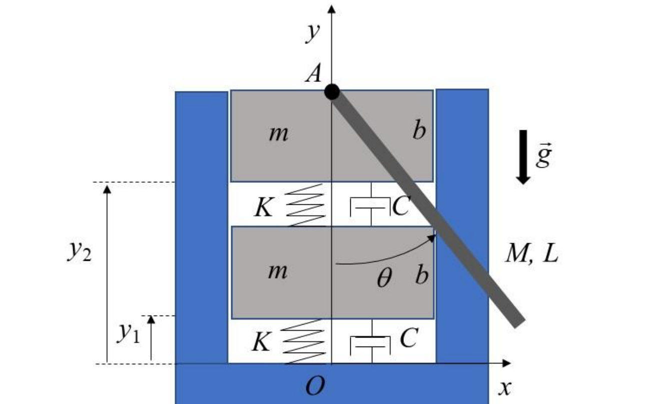
A estrutura ao lado representa uma balança para caminhões. A plataforma é rígida e sua massa pode ser considerada desprezível em comparação à massa m do contrapeso sustentado por um cabo ideal em E e à massa $m/2$ da alavanca homogênea. Em A, B, C e D há articulações ideais cujas dimensões são desprezíveis. Na configuração mostrada, a cota horizontal do centro de massa do caminhão sobre a plataforma é d, a alavanca está na horizontal e o sistema está em equilíbrio estático. São conhecidas também as cotas a e b. Com base nessas informações pedem-se, em função dos parâmetros do problema:



(a) o deslocamento virtual δ_E do contrapeso de massa m;
(b) os deslocamentos virtuais δ_B e δ_A das respectivas articulações;
(c) o deslocamento virtual δ_P do caminhão;
(d) utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determine a massa M do caminhão.

Questão 2 (4,0 pontos)

O sistema ao lado é composto por dois blocos rígidos idênticos, de massa m e altura b, montados sobre molas e amortecedores lineares, de constantes K e C, respectivamente. As molas têm comprimento natural ℓ (i.e., quando indeformadas). Uma barra rígida e homogênea, de massa M e comprimento L está ligada ao bloco superior por meio de uma articulação ideal, conforme mostra a figura. Não há atrito entre blocos e guia. Considerando como coordenadas generalizadas as cotas verticais das faces inferiores dos blocos, y_1 e y_2, e o ângulo θ, que a barra faz com a vertical, pede-se:



(a) Construa a função de energia cinética, $T = T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta)$;
(b) Construa as funções de energia potencial, $V = V(y_1, y_2, \theta)$, e de dissipação de Rayleigh, $R = R(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$;
(c) Deduza as equações de movimento a partir das Equações de Lagrange;
(d) Seja $\mathbf{q} = [y_1 \quad y_2 \quad \theta]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas. Determine o ponto de equilíbrio (estável) $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \bar{\theta}]^T$ do sistema.

(e) Definindo um novo vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$, escreva as equações linearizadas na forma matricial, $\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, construindo explicitamente as matrizes de massa, $\mathbf{M}_0$, de amortecimento $\mathbf{D}_0$ e de rigidez, $\mathbf{K}_0$, calculadas no ponto de equilíbrio, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Questão 3 (2 pontos)
Analise as 4 assertivas a seguir e responda se são verdadeiras ou falsas, apresentando as devidas justificações para cada caso.

a) O Princípio dos Trabalhos Virtuais não possibilita determinar as reações externas e as forças vinculares que mantêm sistemas de corpos rígidos em equilíbrio.
b) Considere um disco homogêneo de raio r e massa m que realiza movimento plano de rolamento sem escorregamento sobre uma pista horizontal com velocidade angular $\omega = const$. Sendo $G = (x, y)$ as coordenadas de seu centro de massa, podemos afirmar que o disco está sujeito a um vínculo não-holônomo representado pela equação diferencial $\dot{x} = \omega r$.
c) Seja S um sistema de p partículas materiais de massas m_i situadas nas posições $P_i = P_i(x_i, y_i, z_i)$, estando cada qual sujeita a um sistema de forças de resultante $\vec{R}_i$. Admitindo-se que existam m vínculos holônomos que restrinjam o movimento desse sistema material, de forma tal a que o mesmo possa ser descrito por $n = 3 \times p - m$ coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$, a força generalizada F_j corresponde ao termo f do trabalho virtual $\delta\tau = f\delta q_j$ desenvolvido em um experimento virtual em que $q_j \neq 0$ e $q_i = 0, \forall\, i \neq j, i = 1, \dots, n$.
d) Considere o movimento de um bloco de massa m que se translada sobre um plano horizontal, sujeito à ação da força peso, de uma força horizontal constante F_x e da força de atrito de deslizamento de módulo $\mu m g$, sendo μ o coeficiente de atrito entre as superfícies do bloco e do plano horizontal. Pode-se, então, afirmar que a equação de movimento do bloco é obtida a partir da equação de *Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = F_x$, em que T e R são, respectivamente, a função energia cinética e a função potencial dissipativo de Rayleigh.

Questão 4 (1,0 ponto)
Sobre a Dinâmica dos Sistemas de Massas Variáveis:
(a) O que estabelece o *Princípio da Relatividade de Galileu*?
(b) Seja $m = m(t)$ a massa de uma partícula, dependente do tempo. Sejam $\mathbf{v}(t)$ sua velocidade e $\mathbf{u}(t)$ a velocidade da matéria que por ela é perdida (ou por ela é ganha), ambas medidas em relação a um mesmo referencial inercial. Seja $\mathbf{F}(t)$ a resultante das forças externas agindo sobre essa partícula. Qual das duas equações abaixo satisfaz o Princípio de Relatividade de Galileu? Demonstre, ou ao menos justifique sua resposta.

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \qquad (1)$$

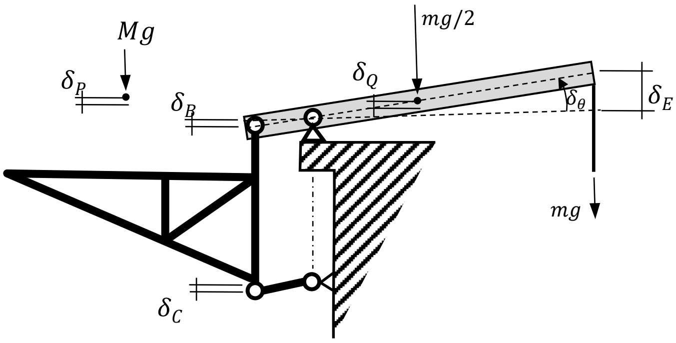
$$\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v}\right) = \mathbf{F} \qquad (2)$$

(c) Cite os nomes de ao menos três cientistas que se dedicaram ao estudo da dinâmica dos sistemas de massas variáveis.

Resolução

Questão 1 (4,0 pontos)

O mecanismo desta questão denomina-se *balança de Roberval*. Para auxiliar na visualização do seu funcionamento, observe o diagrama com os deslocamentos virtuais correspondentes ao único grau de liberdade da estrutura, a rotação em torno da articulação fixa em D. Considerando o sistema de coordenadas, tem-se:



(a) (0,5 ponto)

$$\vec{r}_E = x_E\vec{\imath} + y_E\vec{\jmath}$$
$$\delta\vec{r}_E = \delta x_E\vec{\imath} + \delta y_E\vec{\jmath} = 0 + \delta y_E\,\vec{\jmath} = \delta_E\vec{\jmath} \qquad (1) \quad (0{,}5)$$

(b) (0,5 ponto)

Analogamente ao ponto E,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_B = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}\\ \vec{r}_A = x_A\vec{\imath} + y_A\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta\vec{r}_B = -\delta y_B\vec{\jmath} = -\delta_B\vec{\jmath}\\ \delta\vec{r}_A = -\delta y_A\vec{\jmath} = -\delta_A\vec{\jmath}\end{array}\right\} \qquad (3)$$

(c) (0,5 ponto)

$$\vec{r}_P = x_P\vec{\imath} + y_P\vec{\jmath} \qquad (4)$$

$$\delta\vec{r}_P = \delta x_P\vec{\imath} - \delta y_P\vec{\jmath} = -\delta_P\vec{\jmath} \qquad (5) \quad (0{,}5)$$

d) (2,5 pontos)

Todos os deslocamentos virtuais são compatíveis com os vínculos; portanto, as únicas forças que realizam trabalhos virtuais são os pesos do caminhão, da alavanca e do contrapeso. Deve-se, portanto, calcular $\delta\vec{r}_Q$:

$$\vec{r}_Q = x_Q\vec{\imath} + y_Q\vec{\jmath} \Rightarrow \delta\vec{r}_Q = \delta y_Q\vec{\jmath} \qquad (0{,}5)$$

Portanto, pelo PTV,

$$\delta\tau = \delta\tau_E + \delta\tau_P + \delta\tau_Q = 0 \qquad (6) \quad (0{,}5)$$

$$\delta\tau_E = -mg\vec{\jmath}.\delta\vec{r}_E = -mg\vec{\jmath}.\delta_E\vec{\jmath} = -mg\delta_E$$

$$\delta\tau_P = -Mg\vec{\jmath}.(-\delta_P\vec{\jmath}) = Mg\delta_P$$

$$\delta\tau_Q = -\frac{mg}{2}\vec{\jmath}.(\delta y_Q\vec{\jmath}) = -\frac{mg}{2}\delta y_Q$$

$$\delta\tau = -mg\delta_E + Mg\delta_P - \frac{mg}{2}\delta y_Q = 0 \quad (7) \quad (0{,}5)$$

Da geometria tem-se:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_E = b\delta\theta\\ \delta y_Q = \dfrac{b-a}{2}\delta\theta\\ \delta_B = \delta_A = \delta_P = a\delta\theta\end{array}\right\} \qquad (8) \quad (0{,}5)$$

$$\delta\tau = \left(-mgb + Mga - \frac{mg}{2}\frac{(a+b)}{2}\right)\delta_\theta = 0.$$

Como δ_θ é arbitrário, adotando-se $\delta_\theta \neq 0$, chega-se a

$$-mgb + Mga - \frac{1}{4}(mga + mgb) = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{m}{4}\frac{(5b-a)}{a} \qquad (0{,}5)$$

Questão 2 (4,0 pontos)

(a) Construa a função de energia cinética, $T = T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta)$:

$$T = T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta) = T_1(\dot{y}_1) + T_2(\dot{y}_2) + T_b(\dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta)$$

com,

$$T_1(\dot{y}_1) = \frac{1}{2} m\dot{y}_1^2; \qquad T_2(\dot{y}_2) = \frac{1}{2} m\dot{y}_2^2; \qquad T_b(\dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} M\dot{y}_2^2 + M\dot{y}_2\dot{\theta}\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2;$$

Então.

$$T(\dot{y}_2, \dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}(m+M)\dot{y}_2^2 + \frac{ML}{2}\sin\theta\,\dot{y}_2\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\dot{\theta}^2 \quad .$$ (0,5)

(b) Construa as funções de energia potencial, $V = V(y_1, y_2, \theta)$, e de dissipação de Rayleigh, $R = R(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$:
Energia Potencial:

$$V = V(y_1, y_2, \theta) = V_1(y_1) + V_2(y_1, y_2) + V_b(y_1, y_2, \theta);$$

com

$$V_1(y_1) = mg(y_1 + \frac{b}{2}) + \frac{1}{2}K(y_1 - \ell)^2; \qquad V_2(y_1, y_2) = mg(y_2 + \frac{b}{2}) + \frac{1}{2}K\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right)^2$$

e

$$V_b(y_1, y_2, \theta) = Mg(y_2 - \frac{L}{2}\cos\theta)$$

Assim,

$$V = V(y_1, y_2, \theta) = mg(y_1 + \frac{b}{2}) + \frac{1}{2}K_1(y_1 - \ell)^2 + mg(y_2 + \frac{b}{2}) + \frac{1}{2}K_2\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right)^2 + Mg(y_2 - \frac{L}{2}\cos\theta);$$

(0,5)

Função de dissipação de Rayleigh (ou Rayleighiana):

$$R(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}C\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}C(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 .$$ (0,5)

(c) Deduza as equações de movimento a partir das Equações de Lagrange:

Neste caso, sem ação de forças externas não-conservativas, as Equações de Lagrange ficam escritas:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad j = 1,2,3; \text{ com } \mathbf{q} = [y_1 \quad y_2 \quad \theta]^T$$

As derivadas parciais da função de energia cinética em relação às coordenadas generalizadas são:

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = \frac{\partial T}{\partial y_2} \equiv 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{ML}{2}\cos\theta\,\dot{y}_2\dot{\theta}$$

E as quantidades de movimento generalizadas:

$$p_{y_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = m\dot{y}_1$$

$$p_{y_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} = (m+M)\dot{y}_2 + \left(M\frac{L}{2}\sin\theta\right)\dot{\theta};$$

$$p_{\theta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = M\frac{L}{2}\sin\theta\dot{y}_2 + \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}$$

de tal forma que suas derivadas temporais são:

$$\dot{p}_{y_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = m\ddot{y}_1$$

$$\dot{p}_{y_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2} = (m+M)\ddot{y}_2 + \left(\frac{ML}{2}\sin\theta\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 .$$

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{ML}{2}\sin\theta\right)\ddot{y}_2 + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{y}_2\dot{\theta}$$

(0,5)

As derivadas parciais da função de energia potencial em relação às coordenadas generalizadas são:

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = mg + K(y_1 - \ell) - K\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_2} = (m+M)g + K\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right) \qquad ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

E as derivadas parciais da função de Rayleigh em relação às velocidades generalizadas são:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{y}_1} = C\dot{y}_1 + C(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 2C\dot{y}_1 - C\dot{y}_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{y}_1} = -C(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = -C\dot{y}_1 + C\dot{y}_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \equiv 0$$

(0,5)

Assim, colecionando termos, as equações de movimento são deduzidas:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + mg + K(y_1 - \ell) - K\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right) + 2C\dot{y}_1 - C\dot{y}_2 = 0 \\ (m+M)\ddot{y}_2 + \left(\frac{ML}{2}\sin\theta\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + (m+M)g + K\left((y_2 - (y_1 + b)) - \ell\right) - C\dot{y}_1 + C\dot{y}_2 = 0 \\ \frac{ML}{2}\sin\theta\ddot{y}_2 + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{y}_2\dot{\theta} - \frac{ML}{2}\cos\theta\dot{y}_2\dot{\theta} + Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \end{cases};$$

que podem ser rearranjadas na forma:

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 + 2C\dot{y}_1 - C\dot{y}_2 + 2Ky_1 - Ky_2 = -mg - Kb \\ (m+M)\ddot{y}_2 + \left(\frac{ML}{2}\sin\theta\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - C\dot{y}_1 + C\dot{y}_2 - Ky_1 + Ky_2 = -(m+M)g + K(b+\ell) \\ \frac{ML}{2}\sin\theta\ddot{y}_2 + \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{ML}{2}g\sin\theta = 0 \end{cases};$$

(0,5)

(d) Seja $\mathbf{q} = [y_1 \quad y_2 \quad \theta]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas. Determine o ponto de equilíbrio (estável) $\bar{\mathbf{q}} = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \bar{\theta}]^T$ do sistema e linearize as equações de movimento em torno deste ponto.

Nos pontos de equilíbrio a função de energia potencial tem um extremo, o que significa que suas derivadas parciais são nulas nesses pontos:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial y_1}\right]_{\bar{y}_1} = 0; \quad \left[\frac{\partial V}{\partial y_2}\right]_{\bar{y}_2} = 0; \quad \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\bar{\theta}} = 0.$$

Ou seja

$$\begin{cases} mg + K(\bar{y}_1 - \ell) - K\left((\bar{y}_2 - (y_1 + b)) - \ell\right) = 0 \\ (m+M)g + K\left((\bar{y}_2 - (\bar{y}_1 + b)) - \ell\right) = 0 \\ Mg\frac{L}{2}\sin\bar{\theta} = 0 \end{cases};$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} 2K\bar{y}_1 - K\bar{y}_2 = -mg - Kb \\ -K\bar{y}_1 + k\bar{y}_2 = -(m+M)g + K(b+\ell) \\ \frac{ML}{2}g\sin\bar{\theta} = 0 \end{cases};$$

que poderiam ter sido obtidas, alternativamente, impondo-se nulas as acelerações e velocidades nas equações de movimento. Estas equações algébricas têm a solução:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \ell - \frac{(2m+M)g}{K}; \\ \bar{y}_2 = (b+2\ell) - \dfrac{(3m+2M)g}{K}; \\ \bar{\theta} = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(0,5)

Note que os pontos de equilíbrio estáveis são aqueles em que n é par. Fisicamente, corresponde a um único ponto de equilíbrio estável, correspondente a $\bar{\theta} = 0$. A estabilidade poderia ser verificada inspecionando-se a Hessiana da função de energia potencial, quando calculada no ponto de equilíbrio. De fato, a condição de estabilidade é que a Hessiana seja definida positiva no ponto de equilíbrio, ou seja,

$$\mathbf{H}_V\big|_{\bar{\mathbf{q}}} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}\right]_{\bar{\mathbf{q}}} \text{ definida positiva.}$$

Assim, a configuração de equilíbrio estável é:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ell - \dfrac{(m+M)g}{K} \\ (b+2\ell) - \dfrac{(3m+2M)g}{K} \\ 0 \end{bmatrix};$$

(e) Definindo um novo vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{u} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$, escreva as equações linearizadas na forma matricial, $\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, construindo explicitamente as matrizes de Massa, $\mathbf{M}_0$, de amortecimento $\mathbf{D}_0$ e de rigidez, $\mathbf{K}_0$, calculadas no ponto de equilíbrio, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Considerando que $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{q}}$, e substituindo-se $\bar{\mathbf{q}}$ obtido no item (d) nas equações de movimento, obtêm-se as equações homogêneas (note que, em torno do ponto de equilíbrio estável, $u_3 = \theta$):

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2C\dot{u}_1 - C\dot{u}_2 + 2Ku_1 - Ku_2 = 0 \\ (m+M)\ddot{u}_2 + \left(\dfrac{ML}{2}\sin\theta\right)\ddot{\theta} + \left(\dfrac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - C\dot{u}_1 + C\dot{u}_2 - Ku_1 + Ku_2 = 0 \\ \dfrac{ML}{2}\sin\theta\ddot{u}_2 + \dfrac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \dfrac{MgL}{2}\sin\theta = 0 \end{cases};$$

Essas equações são ainda não-lineares. Pode-se escrevê-las:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$$

com

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & (m+M) & \left(\frac{ML}{2}\sin\theta\right) \\ 0 & \frac{ML}{2}\sin\theta & \frac{ML^2}{3} \end{bmatrix};\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2C & -C & 0 \\ -C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2K & -K & 0 \\ -K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{g}(\mathbf{u},\dot{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{ML}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 \\ \frac{MgL}{2}\sin\theta \end{bmatrix}$$

Considerando-se pequenos ângulos de oscilação, tal que $\sin\theta \cong \theta$ e $\cos\theta \cong 1$ (ou seja expandindo-se as funções trigonométricas em série de Taylor em torno de $\theta = 0$ e retendo-se termos de primeira ordem) e desprezando-se termos quadráticos, o sistema pode ser linearizado na forma,

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2C\dot{u}_1 - C\dot{u}_2 + 2Ku_1 - Ku_2 = 0 \\ (m+M)\ddot{u}_2 - C\dot{u}_1 + C\dot{u}_2 - Ku_1 + ku_2 = 0\,; \\ \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

Ou ainda,

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_0\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

com

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & (m+M) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{3} \end{bmatrix};\ \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 2C & -C & 0 \\ -C & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} 2K & -K & 0 \\ -K & K & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MgL}{2} \end{bmatrix}$$

(0,5)

Esta mesma equação teria sido obtida da linearização das funções de energia cinética, de Rayleigh e potencial, com

$$\mathbf{M}_0 = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k}\right]_{\bar{\mathbf{q}}};\ \mathbf{D}_\mathbf{0} = \left[\frac{\partial^2 R}{\partial\dot{q}_j\partial\dot{q}_k}\right]_{\bar{\mathbf{q}}};\ \mathbf{K}_\mathbf{0} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j\partial q_k}\right]_{\bar{\mathbf{q}}}$$

Questão 3 (2,0 pontos)
Analise as 4 assertivas a seguir e responda se são verdadeiras ou falsas, apresentando as devidas justificações para cada caso.

a) O Princípio dos Trabalhos Virtuais não possibilita determinar as reações externas e as forças vinculares que mantêm sistemas de corpos rígidos em equilíbrio.
b) Considere um disco homogêneo de raio r e massa m que realiza movimento plano de rolamento sem escorregamento sobre uma pista horizontal com velocidade angular $\omega = const.$ Sendo $G = (x, y)$ as coordenadas de seu centro de massa, podemos afirmar que o disco está sujeito a um vínculo não-holônomo representado pela equação diferencial $\dot{x} = \omega r$.
c) Seja S um sistema de p partículas materiais de massas m_i situadas nas posições $P_i = P_i(x_i, y_i, z_i)$, estando cada qual sujeita a um sistema de forças de resultante $\vec{R}_i$. Admitindo-se que existam m vínculos holônomos que restrinjam o movimento desse sistema material, de forma tal a que o mesmo possa ser descrito por $n = 3 \times p - m$ coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_j, \ldots, q_n$, a força generalizada F_j corresponde ao termo f do trabalho virtual $\delta\tau = f\delta q_j$ desenvolvido em um experimento virtual em que $q_j \neq 0$ e $q_i = 0, \forall\ i \neq j, i = 1, \ldots, n$.
d) Considere o movimento de um bloco de massa m que se translada sobre um plano horizontal, sujeito à ação da força peso, de uma força horizontal constante F_x e da força de atrito de deslizamento de módulo μmg, sendo μ o coeficiente de atrito entre as superfícies do bloco e do plano horizontal. Pode-se, então, afirmar que a equação de movimento do bloco é obtida a partir da equação de *Lagrange* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = F_x$, em que T e R são, respectivamente, a função energia cinética e a função potencial dissipativo de Rayleigh.

Resolução (0,5 ponto para cada resposta correta)
a) **FALSA:** O Princípio dos Trabalhos Virtuais possibilita determinar as reações internas e as forças vinculares agentes em sistemas materiais, bastando, para tanto, que se escolham deslocamentos virtuais incompatíveis com os vínculos.

b) **FALSA:** A equação vincular $\dot{x} = \omega r$ é uma equação diferencial exata que, ao ser integrada, dá origem à equação algébrica $x = x_0 + \omega r t$. Portanto, contrariamente ao afirmado, o disco está sujeito a um vínculo holônomo.

c) **VERDADEIRA:** Para o sistema material vinculado descrito, o trabalho virtual realizado pelas resultantes das forças agentes nas m partículas é dado por

$$\delta\tau = \sum_{i=1}^{m} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \sum_{i=1}^{m} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{P}_i}{\partial q_n}\delta q_n$$

A expressão acima pode ser escrita na forma

$$\delta\tau = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + \cdots + Q_n \cdot \delta q_n = \vec{Q} \cdot \delta\vec{q}$$

Portanto, para um experimento virtual em que $q_j \neq 0$ e $q_i = 0, \forall\ i \neq j, i = 1, \ldots, n$, vê-se que o trabalho virtual realizado é $\delta\tau = Q_j \delta q_j$, o que concorda integralmente com a asserção postulada.

d) **FALSA:** O bloco está sujeito a uma força de atrito deslizante, que, diferentemente da força de atrito viscoso, não pode ser expressa na forma de um gradiente de um potencial dissipativo. Assim sendo, a função dissipativa de Rayleigh não comparece na equação de Lagrange que descreve o movimento do bloco. A forma correta de escrever a equação de Lagrange para esse problema é a seguinte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F_x - \mu mg \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

Questão 4 (1,0 pontos)

Sobre a Dinâmica dos Sistemas de Massas Variáveis:
(a) O que estabelece o *Princípio da Relatividade de Galileu*?

O *Princípio da Relatividade de Galileu estabelece que as leis de movimento não se alteram pela escolha do referencial inercial.*
Ou ainda, *que a forma das equações do movimento é invariante, com respeito à escolha do referencial inercial.*
Ou, equivalentemente, O *Princípio de Relatividade de Galileu* afirma que as leis fundamentais da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

(0,3)

(b) Seja $m = m(t)$ a massa de uma partícula, dependente do tempo. Sejam $\mathbf{v}(t)$ sua velocidade e $\mathbf{u}(t)$ a velocidade da matéria que por ela é perdida (ou por ela é ganha), ambas medidas em relação a um mesmo referencial inercial. Seja $\mathbf{F}(t)$ a resultante das forças externas agindo sobre essa partícula. Qual das duas equações abaixo satisfaz o Princípio de Relatividade de Galileu? Demonstre, ou ao menos justifique sua resposta.

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \tag{2}$$

A Equação (1), conhecida como Equação de Meshchersky, e que corresponde à segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa variável, é aquela que satisfaz o Princípio de Relatividade de Galileu. A Equação (2) é um caso particular da primeira e apenas satisfaz este Princípio quando a massa é invariante ou quando $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ (conhecido como 'caso de Levi-Civita').

(0,2)

Ver a demonstração nos slides da palestra: *Mechanics of variable mass systems: a historical perspective*, do Prof. C.P. Pesce, proferida em 08/07/2022.

Demonstração: (0,2)

(c) Cite os nomes de ao menos três cientistas que se dedicaram ao estudo da dinâmica dos sistemas de massas variáveis.

Inúmeros são os cientistas que se dedicaram ao tema. De fundamental importância podemos citar:

1. Von Buquoy, cientista tcheco, de origem belga, início do século XIX; pioneiro e responsável pela primeira formulação explícita da equação de movimento de corpos de massa variável; ilustrou o equacionamento através do problema da corrente sendo suspensa de ou caindo sobre uma mesa.

2. Arthur Cayley, matemático britânico, meados do século XIX; formulou o problema da corrente sob a ótica da Mecânica Analítica.

3. Ivan V. Meschchersky, cientista russo, final do século XIX e início do século XX; responsável pela formalização da equação de movimento de sistemas materiais de massa variável e pela introdução

de seu ensino no leste europeu; a quem se atribui a forma da segunda lei de Newton aplicável a pontos materiais de massa variável, conhecida como equação de Meschchersky.

4. Levi-Civita, matemático italiano, início do século XX; tratou o problema elementar de sistemas de massa variável quando a massa agregada/perdida tem velocidade nula com respeito ao referencial inercial considerado.

5. McIver, cientista inglês, século XX, década de 70; responsável pela extensão do Teorema do Transporte de Reynolds, através de formulação da Mecânica Analítica, no âmbito de sistemas de massa variável.

6. Livja Cveticanin, cientista sérvia, final do século XX e presente; formalização da mecânica analítica no contexto de sistemas de massa variável e autoria de livro específico no tema, aplicado à dinâmica de máquinas que exibem variação de massa.

7. Hans Irschik, mecanicista austríaco, final do século XX e presente; revisão do tema e dedução das equações de Lagrange para volumes não-materiais.

(0,3)