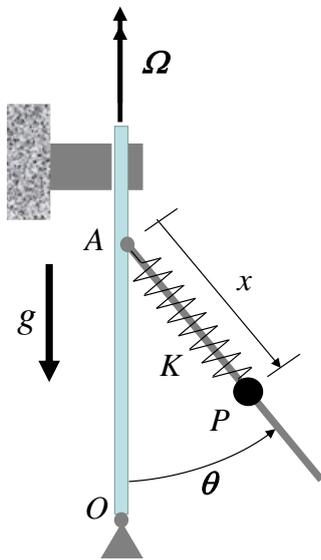




**PME 3200 – MECÂNICA II – Terceira Prova – 18 de junho de 2019**

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

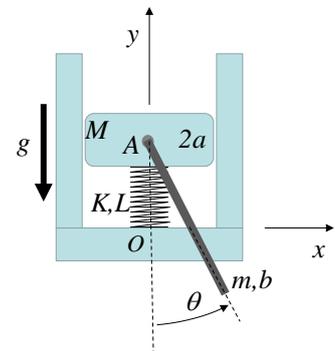


**Questão 1 (3,5 pontos)** A figura representa um sistema dinâmico composto por um pequeno anel  $P$ , de formato esférico e de massa  $m$ , que pode deslizar sobre uma guia retilínea. A guia é uma haste rígida, de massa desprezível, vinculada em  $A$  por meio de uma junta de revolução a uma haste vertical, também rígida, que gira com velocidade angular  $\Omega$ , mantida constante, em torno de seu eixo vertical. Note que a guia se mantém sempre em plano vertical. O anel está ligado à junta de revolução por meio de uma mola linear de constante de rigidez  $K$ . A mola tem massa desprezível e comprimento natural (indeformado) igual a  $L$ . O contato com a haste é lubrificado e impõe ao anel uma força dissipativa viscosa, linearmente proporcional à velocidade relativa, de coeficiente  $b$ . De forma análoga, a junta de revolução é também lubrificada, proporcionando um torque de dissipação viscosa linearmente proporcional a  $\dot{\theta}$ , com coeficiente de proporcionalidade  $c$ . Considere as coordenadas generalizadas  $(x, \theta)$ . Pede-se:

- Construa as funções de energia cinética,  $T = T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ , de energia de dissipação de Rayleigh,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\dot{x}, \dot{\theta})$ , e de energia potencial,  $V = V(x, \theta)$ , do sistema.
- A partir das equações de Lagrange, deduza as equações que regem o movimento do sistema.
- Conhecida a velocidade angular  $\Omega$ , constante, determine equações que levam a possíveis configurações de equilíbrio dinâmico do sistema,  $(\bar{x}, \bar{\theta})$ .

**Questão 2 (3,5 pontos)**. O bloco, de massa  $M$  e altura  $2a$ , restrito a movimentar-se na vertical, está apoiado sobre uma mola linear de constante  $K$  e comprimento natural  $L$ . Uma barra homogênea de massa  $m$  e comprimento  $b$  está presa ao bloco através de um eixo que passa por seu centro de massa,  $A$ . Considere as coordenadas generalizadas  $(y, \theta)$ , com  $y = y_A$  a posição vertical do ponto  $A$ , medida a partir do solo. Despreze quaisquer efeitos dissipativos. Pede-se:

- Construa as funções de energia cinética,  $T = T(\theta, \dot{y}, \dot{\theta})$  e de energia potencial,  $V = V(y, \theta)$ , do sistema.
- Da função  $V = V(y, \theta)$ , determine as possíveis configurações de equilíbrio do sistema,  $(\bar{y}, \bar{\theta})$ , em função do conjunto de parâmetros  $(M, m, K, L, g, a, b)$ .
- A partir das equações de Lagrange, deduza as equações que regem o movimento do sistema.
- Das equações de movimento, verifique as configurações de equilíbrio obtidas em (b).
- Linearize as equações de movimento em torno da configuração de equilíbrio estável e expresse-as na forma matricial  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_L + \mathbf{K}\mathbf{q}_L = \mathbf{0}$ , com  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  as correspondentes matrizes de massa e rigidez do sistema e com  $\mathbf{q}_L = [(y - \bar{y}) \ \theta]^T$  o vetor de coordenadas generalizadas.



**Questão 3 (1,0 ponto)**. Baseada na palestra do dia 06/06/2019, sobre Dinâmica de Sistemas de Massa Variável.

- Enuncie, com suas palavras, o Princípio de Relatividade de Galileu. Sabe-se que a segunda Lei de Newton aplicada a uma partícula de massa variável, também conhecida como Equação de Mechtersky, satisfaz a este princípio. Qual é o caso particular desta equação conhecido como ‘caso de Levi-Civita’?
- De acordo com os autores Šíma and Podolský (2005), o cientista e inventor von Buquoy, tchecoslovaco, porém nascido em Bruxelas, foi o primeiro a investigar sistemas com variação de massa, em 1812. Descreva qual foi o problema por ele analisado e porque pode ser formulado como um sistema de massa variável com a posição.



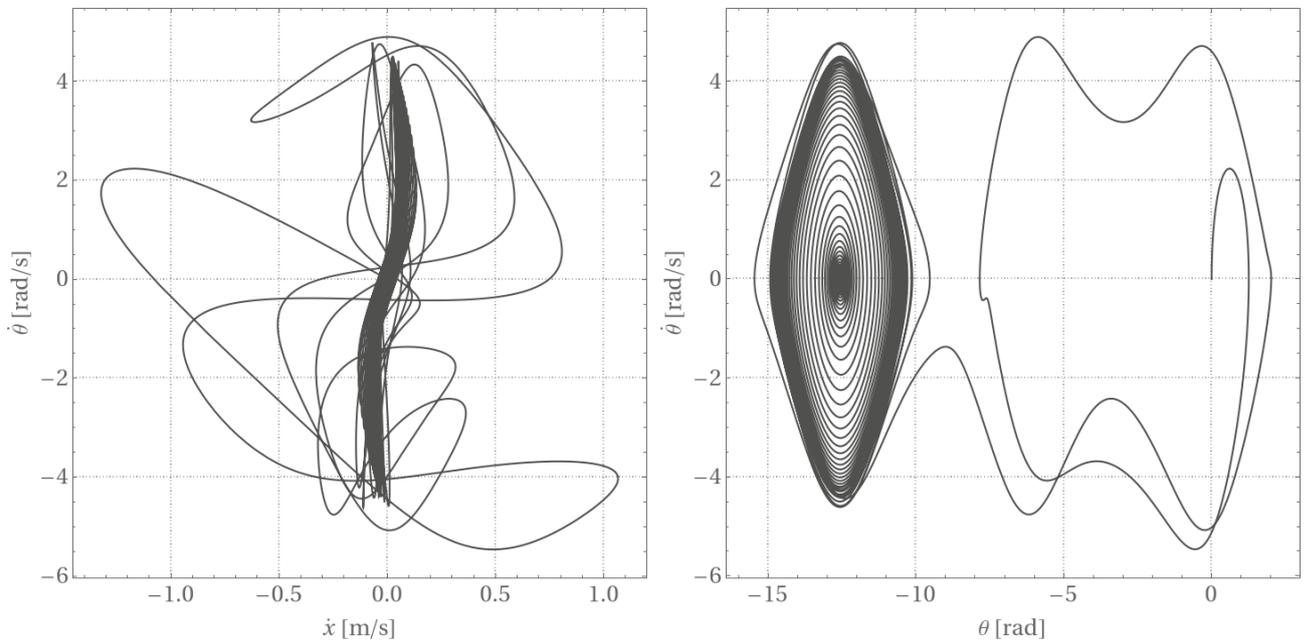
**Questão 4 (3,0 pontos).** Baseada no EMSC#3. Na terceira parte do EMSC-2019, as seguintes equações de movimento, nas coordenadas generalizadas  $(x, \theta)$ , puderam ser obtidas a partir do formalismo de Lagrange:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m(R - e \cos \theta)\ddot{\theta} + me\dot{\theta}^2 \sin \theta + b\dot{x} + kx = 0 \\ m(R - e \cos \theta)\ddot{x} + \frac{1}{2}mR(3R - 4e \cos \theta)\ddot{\theta} + meR\dot{\theta}^2 \sin \theta + mge \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Linearize as equações de movimento em torno da configuração de equilíbrio estável do sistema, expressando-as na forma matricial,  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , com  $\mathbf{q} = [x \ \theta]^T$ .
- (b) Defina o vetor de estados  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$  e expresse a equação diferencial ordinária linearizada, obtida em (a), na forma de espaço de estados  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ .
- (c) Na figura abaixo são ilustrados dois dos gráficos obtidos a partir da simulação numérica do cenário 3.4, para o qual adotou-se o seguinte conjunto de parâmetros e condições iniciais:

Parâmetros						
$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$R$ (m)	$e$ (m)	$m$ (kg)	$M$ (kg)	$k$ (N/m)	$b$ (Ns/m)
9,8	0,30	0,06	1,0	10,0	60,93	2,47
Condições iniciais						
$x$ (m)	$\dot{x}$ (m/s)		$\theta$ (rad)		$\dot{\theta}$ (rad/s)	
0,60	0,0		0,0		0,0	

Para este cenário, sabe-se que as frequências naturais de pequenas oscilações não-amortecidas do sistema são:  $\omega_1 = 2,16 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 2,73 \text{ rad/s}$ . Descreva sucintamente a resposta dinâmica observada neste cenário.





## Resolução

### Questão 1 (3,5 pontos)

(a)

$$T = T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m[\dot{x}^2 + (x\dot{\theta})^2 + (x \sin \theta \Omega)^2] \quad , \quad (1,0) \quad (1)$$

$$\mathcal{R}(\dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} [b\dot{x}^2 + c\dot{\theta}^2] \quad , \quad (0,2) \quad (2)$$

$$V(x, \theta) = \frac{1}{2} K[x - L]^2 - mgx \cos \theta \quad . \quad (0,3) \quad (3)$$

(b) Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc}; \quad \text{com } q_1 = x; \quad q_2 = \theta \quad . \quad (3)$$

Derivadas parciais e temporais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= m\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta; & \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; & \frac{\partial T}{\partial \theta} &= mx^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta; & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= mx^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= K(x - L) - mg \cos \theta; & \frac{\partial V}{\partial \theta} &= mgx \sin \theta; & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}} &= b\dot{x}; & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} &= c\dot{\theta} \quad . \end{aligned} \quad (0,5) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = mx^2 \ddot{\theta} + 2mx\dot{\theta}$$

Demais forças generalizadas não conservativas:

$$Q_1^{nc} = Q_x^{nc} = 0; \quad Q_2^{nc} = Q_\theta^{nc} = 0 \quad . \quad (0,5) \quad (5)$$

Equações de movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - m\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta + K(x - L) - mg \cos \theta + b\dot{x} = 0 \\ mx^2 \ddot{\theta} + 2mx\dot{\theta} - mx^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgx \sin \theta + c\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad . \quad (0,5) \quad (6)$$

ou

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + (K - m(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta))x - mg \cos \theta = KL \\ mx^2 \ddot{\theta} + (c + 2mx\dot{\theta})\dot{\theta} - mx^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgx \sin \theta = 0 \end{cases}$$

(c) Configurações de equilíbrio: fazendo  $(\dot{x}, \dot{\theta}, \ddot{x}, \ddot{\theta}) \equiv (0, 0, 0, 0)$  em (6), seguem as equações de equilíbrio,

$$\begin{cases} (K - m\Omega^2 \sin^2 \theta)x - mg \cos \theta = KL \\ (g - x\Omega^2 \cos \theta)x \sin \theta = 0 \end{cases} \quad . \quad (0,5) \quad (7)$$

A segunda equação oferece as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} (g - x\Omega^2 \cos \theta) &= 0 \\ x \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (8)$$

De (8b), a alternativa  $\bar{x} = 0$  deve ser descartada. Tem-se então que  $\sin \theta = 0$ , de onde,  $\bar{\theta} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Esta solução, substituída em (7a), conduz às seguintes raízes,

$$\begin{cases} \bar{x} = L + \frac{mg}{K}; \quad \bar{\theta} = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \text{ par} \\ \bar{x} = L - \frac{mg}{K}; \quad \bar{\theta} = n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (9)$$

Na primeira, a guia está apontada para baixo e na segunda para cima. Pode-se ainda verificar que ambas as soluções de equilíbrio em (9) são instáveis. A primeira, para  $\Omega \neq 0$ .



Alternativamente, de (8a), segue que  $\bar{x} = \frac{g}{\Omega^2 \cos \bar{\theta}}$ , que substituída em (7a) conduz, após alguma simples álgebra, às equações

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta} &= \frac{g}{\Omega^2 L} - \frac{mg}{KL} \\ \frac{\bar{x}}{L} &= \frac{1}{1 - m\Omega^2/K} \end{aligned} \quad (10)$$

Obviamente,  $\left| \frac{g}{\Omega^2 L} - \frac{mg}{KL} \right| \leq 1$ , para que sejam possíveis soluções reais. Além disso, observa-se que existe uma singularidade em (10b), quando  $m\Omega^2/K = 1$ . Esta singularidade delimita a condição de estabilidade da configuração de equilíbrio dada pela equação (10). De fato, pode-se verificar que esta possível solução é estável se  $\Omega^2 < K/M$ , tornando-se instável para  $\Omega^2 \geq K/M$ .



**Questão 2 (3,5 pontos)**

- (a) Com  $J_A = mb^2/3$  o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular ao plano do movimento e passante por A, polo acelerado, a energia cinética fica escrita:

$$\begin{aligned}
 T = T(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + m \dot{y} \dot{\theta} \frac{b}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} [M + m] \dot{y}^2 + m \dot{y} \dot{\theta} \frac{b}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 = \quad , \quad (0,5) \quad (1) \\
 &= \frac{1}{2} [M + m] \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y} \dot{\theta} b \sin \theta + \frac{1}{6} m b^2 \dot{\theta}^2
 \end{aligned}$$

Por sua vez a energia potencial, composta por uma parcela elástica e outra gravitacional, pode ser escrita:

$$\begin{aligned}
 V(y, \theta) &= \frac{1}{2} K [y - (a + L)]^2 + Mgy + mg(y - \frac{b}{2} \cos \theta) = \\
 &= \frac{1}{2} K [y - (a + L)]^2 + (M + m)gy - mg \frac{b}{2} \cos \theta \quad (0,5) \quad (2)
 \end{aligned}$$

- (b) As equações de equilíbrio podem ser deduzidas da condição de extremo da energia potencial. No presente caso, em coordenadas generalizadas estas condições são:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0; j = 1, 2 \quad (3)$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V}{\partial y} &= K[y - (a + L)] + (M + m)g = 0 \quad (0,3) \quad (4) \\
 \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} mgb \sin \theta = 0
 \end{aligned}$$

De onde seguem as possíveis configurações de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= (a + L) - \frac{(M + m)g}{K} \quad (0,2) \quad (5) \\
 \bar{\theta} &= n\pi; n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

- (c) Segue que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= (M + m)\dot{y} + \frac{1}{2} m \dot{\theta} b \sin \theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m \dot{y} \dot{\theta} b \cos \theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m b^2}{3} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m \dot{y} b \sin \theta \\
 \frac{\partial V}{\partial y} &= K[y - (a + L)] + (M + m)g; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{2} mgb \sin \theta \quad (0,5) \quad (6) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= (M + m)\ddot{y} + \frac{1}{2} m b \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m b \dot{\theta}^2 \cos \theta; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{m L^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m b \ddot{y} \sin \theta + \frac{1}{2} m b \dot{y} \dot{\theta} b \cos \theta
 \end{aligned}$$

E das equações de Lagrange, na ausência de forças não-conservativas,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0; \text{ com } q_1 = y; q_2 = \theta \quad (7)$$

vem:

$$\begin{cases}
 (M + m)\ddot{y} + \frac{1}{2} m b \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} m b \dot{\theta}^2 \cos \theta + Ky = K(a + L) - (M + m)g \\
 \frac{m b^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m b \ddot{y} \sin \theta + \frac{1}{2} mgb \sin \theta = 0
 \end{cases} \quad (0,5) \quad (8)$$



Ou na forma matricial:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (M+m) & \frac{1}{2}mb\sin\theta \\ \frac{1}{2}mb\sin\theta & \frac{mb^2}{3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mb\dot{\theta}^2 \cos\theta + Ky \\ \frac{1}{2}mgb\sin\theta \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} K(a+L) - (M+m)g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8')$$

(d) Fazendo  $(\dot{y}, \dot{\theta}, \ddot{y}, \ddot{\theta}) \equiv (0, 0, 0, 0)$  em (6), seguem as equações de equilíbrio, confirmando os resultados obtidos no item (b):

$$\begin{cases} \bar{y} = (a+L) - \frac{(M+m)g}{K} \\ \sin\bar{\theta} = 0 \end{cases}. \quad (0,5) \quad (9)$$

(e) As equações de movimento (8) podem ser linearizadas diretamente, para pequenos deslocamentos, pequenas velocidades e pequenas acelerações, em torno da configuração de equilíbrio estável, ou seja, em torno de

$$\begin{aligned} \bar{y} &= (a+L) - \frac{(M+m)g}{K} \\ \bar{\theta} &= 0 \end{aligned}. \quad (10)$$

De fato, seja  $\mathbf{q}_L = [\eta \quad \theta]^T$ ;  $\eta = y - \bar{y}$ , o vetor de coordenadas generalizadas correspondente a pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio considerada. Segue de (8) ou (8'):

$$\mathbf{M}_L \ddot{\mathbf{q}}_L + \mathbf{K}_L \mathbf{q}_L = \mathbf{0}. \quad (0,5) \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{M}|_{\theta=0} = \begin{bmatrix} (M+m) & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgb \end{bmatrix}$$

Note que, nesta situação de linearização, as equações se desacoplam, ficando então impossível prever o fenômeno de instabilidade do tipo que ocorre no pêndulo de Mathieu, que pode ser provocado pelo termo de aceleração do bloco presente na equação (8b). Alternativamente, como pode ser prontamente verificado, as matrizes de massa e rigidez do sistema linearizado podem ser construídas a partir das formas:

$$\mathbf{M}_L = \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right]_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}; \quad \mathbf{K}_L = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right]_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}}. \quad (12)$$



**Questão 3 (1,0 ponto).** Baseada na palestra do dia 06/06/2019, sobre Dinâmica de Sistemas de Massa Variável.

- (a) O Princípio de Relatividade de Galileu permite dizer que *as equações que representam as leis fundamentais da física são invariantes, na forma, com respeito à escolha do referencial inercial.*

O problema de Levi-Civita é aquele em que a massa perdida/ganha pela partícula em estudo adquire/tem velocidade nula imediatamente após/antes do evento considerado.

(0,5)

- (b) O problema estudado por von Buquoy, em 1812, é conhecido como “*o problema da corrente que cai*” ou “*falling chain problem*”. Trata-se de um problema idealizado, que tem duas versões: (i) a corrente que cai de uma mesa; (ii) a corrente que cai sobre uma mesa. Todos os efeitos dissipativos são desprezados e a corrente é idealizada como um fio de massa linear constante, inextensível e infinitamente flexível, que cai sob ação da gravidade. Mais tarde foi estudado por outros autores, como Arthur Cayley, em 1857. Continua sendo um problema relevante no estudo de sistemas de massa variável, particularmente aqueles que podem ter a variação de massa expressa como função explícita da posição (ou seja das coordenadas generalizadas que descrevem a configuração do sistema em estudo).

No estudo de von Buquoy, a massa da parte suspensa da corrente, parte tomada como *sistema em estudo*, pode ser escrita como função linear de seu comprimento, o qual é usualmente escolhido como coordenada generalizada, na descrição da configuração geométrica desse sistema.

(0,5)



**Questão 4 (3,0 pontos).** Baseada no EMSC#3 de 2019.

- (a) **(1,0)** As configurações de equilíbrio do sistema podem ser obtidas diretamente a partir das equações de movimento, tomando nulas as derivadas temporais primeira e segunda das coordenadas generalizadas:

$$\begin{cases} kx = 0 \\ mge \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \theta = n\pi, \pi \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

Nota-se que apenas as configurações em que  $n$  é par correspondem a pontos de equilíbrio estável do sistema. Assim, admitindo pequenas oscilações em torno dessas configurações, pode-se tomar as seguintes expansões em séries de Taylor, truncadas até termos em primeira ordem:  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  e  $\dot{\theta}^2 \approx 0$ . Efetuando estas substituições nas equações não-lineares de movimento, tem-se:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m(R-e)\ddot{\theta} + b\dot{x} + kx = 0 \\ m(R-e)\ddot{x} + \frac{1}{2}mR(3R-4e)\ddot{\theta} + mge\theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Definindo  $\mathbf{q} = [x \ \theta]^T$ , este sistema de equações linearizadas pode ser expresso na forma matricial,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (M+m) & m(R-e) \\ m(R-e) & \frac{1}{2}mR(3R-4e) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mge \end{bmatrix}$$

- (b) **(1,0)** Multiplicando a Eq. (2) acima pela inversa da matriz de massa, ou seja de forma a explicitar  $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{x} \ \ddot{\theta}]^T$  em função das variáveis que compõem o vetor de estados,  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ , obtém-se:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{KR(3R-4e)x + bR(3R-4e)\dot{x} + 2egm(e-R)\theta}{(m+3M)R^2 - 4MeR - 2me^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2[ge(m+M)\theta - b(R-e)\dot{x} - K(R-e)x]}{(m+3M)R^2 - 4MeR - 2me^2} \end{cases} \quad (3)$$

Portanto, adotando o vetor de estados fornecido, as equações linearizadas de movimento podem ser expressas em forma de espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ -\frac{KR(3R-4e)y_1 + bR(3R-4e)y_3 + 2egm(e-R)y_2}{J} \\ -\frac{2[ge(m+M)y_2 - b(R-e)y_3 - K(R-e)y_1]}{J} \end{bmatrix}; \quad J = (m+3M)R^2 - 4MeR - 2me^2 \quad (4)$$



- (c) **(1.0)** O cenário observado corresponde a uma resposta amortecida a condições iniciais: o sistema parte de um estado de não-equilíbrio, e tende assintoticamente a uma configuração de equilíbrio estável. A energia mecânica total é decrescente durante o movimento do sistema devido à dissipação promovida pelos amortecedores lineares ligados ao bloco. No princípio do movimento, o cilindro chega a realizar algumas voltas completas, havendo algumas inversões de direção em sua rotação. Após certo intervalo de tempo, o movimento do cilindro fica restrito a oscilações amortecidas, de amplitude decrescente, em torno da configuração de equilíbrio estável, em  $\mathbf{q} = [0 \quad -4\pi]^T$ , atrator para a qual o sistema tende assintoticamente.