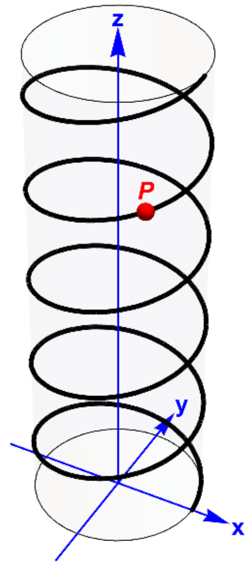
PME 3200 – MECÂNICA II – Terceira Prova – 26 de junho de 2018

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,5 pontos). Uma pequena conta P de massa m, representada na figura ao lado através de uma pequena esfera, pode deslizar *sem atrito* ao longo de um arame helicoidal cilíndrico, de raio a e passo constante h. O eixo da hélice Oz é vertical. Sabe-se que as equações paramétricas da hélice são dadas por $(x = a\cos\theta;\ y = a\sin\theta;\ z = h\theta/2\pi)$, com θ orientado de forma destrógira e medido a partir do plano xz. A conta é liberada do repouso, de uma altura $z = H$, sob a ação da gravidade, g. Desconsiderando a rotação da conta em torno de seu próprio eixo e tomando θ como a coordenada generalizada que descreve sua posição ao longo da curva, pede-se:



(a) Classifique a natureza do vínculo estabelecido pelas equações paramétricas da hélice. Justifique sua resposta.

As equações paramétricas constituem um vínculo holônomo, de natureza geométrica. De fato, a posição do ponto material que representa a pequena conta fica escrita $(P-O) = a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j} + h\theta/2\pi\vec{k}$, no sistema cartesiano indicado na figura ao lado. (0,2)

(b) Escreva as funções de energia cinética $T = T(\dot{\theta})$ e de energia potencial $V = V(\theta)$.

Note que o vínculo estabelecido pelas equações paramétricas constitui a forma integral do vínculo cinemático $(\vec{v} - \vec{v}_O) = a\dot{\theta}\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} + h/2\pi a\vec{k}\right)$, que dá a velocidade de P ao longo da hélice. (0,3)

A energia cinética, relativamente ao sistema $Oxyz$, é dada por:

$$T = T(\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \frac{h^2}{4\pi^2a^2}) = \tfrac{1}{2}ma^2\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)\dot{\theta}^2 \quad . \qquad (0{,}5) \qquad (1)$$

A função de energia potencial (gravitacional) é dada por:

$$V(\theta) = mgz = mgh\theta/2\pi \qquad (0{,}5) \qquad (2)$$

(c) *Da equação de Lagrange*, deduza a equação de movimento da conta ao longo da hélice, na coordenada θ.

Na ausência de forças generalizadas não conservativas, a Equação de Lagrange pode ser escrita, na coordenada θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0\,. \qquad (3)$$

Ou, definida a função Lagrangiana $L(\theta,\dot{\theta}) = T(\dot{\theta}) - V(\theta)$, como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad . \qquad (4)$$

Segue então que derivadas parciais e temporais são:

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)\dot{\theta};\quad \frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{mgh}{2\pi};$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = ma^2\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)\ddot{\theta} \quad . \qquad (0{,}5) \qquad (5)$$

E a equação de movimento é assim:

$$ma^2\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)\ddot{\theta}+\frac{mgh}{2\pi}=0$$

ou

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{a}\frac{h}{2\pi a}\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)^{-1} \quad . \qquad (0{,}5) \qquad (6)$$

ou

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{a}\left(\frac{2\pi a}{h}+\frac{h}{2\pi a}\right)^{-1}$$

(d) Considere agora uma ação dissipativa viscosa linear entre conta e arame representada pela Rayleighiana $\mathcal{R}(\dot{\theta})=\frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$, com C uma constante. Determine, então, a velocidade tangencial limite de queda, v_L.

Com a dissipação de natureza Rayleighiana a equação de Lagrange fica escrita:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}}=0 \quad , \qquad (7)$$

Que conduz à equação de movimento:

$$ma^2\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)\ddot{\theta}+\frac{mgh}{2\pi}+C\dot{\theta}=0 \quad . \qquad (0{,}5) \qquad (8)$$

A velocidade tangencial limite corresponde à aceleração tangencial nula, i.e., $\ddot{\theta}\to 0$. Assim

$$\dot{\theta}_L=-\frac{mgh}{2\pi C} \quad . \qquad (9)$$

E como a velocidade tangencial é dada por:

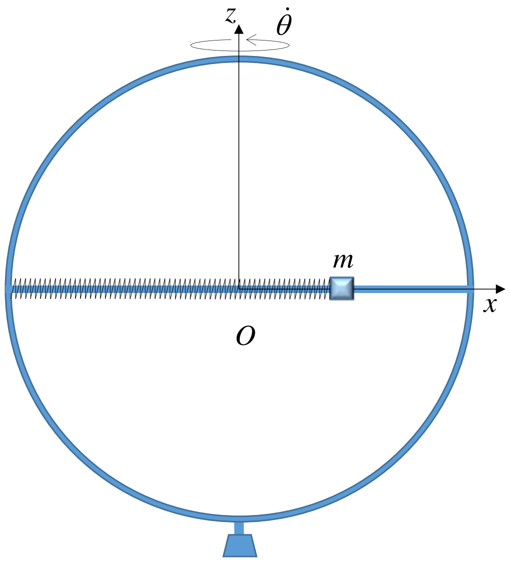
$$v_t(\dot{\theta})=a\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)^{1/2}\dot{\theta} \qquad (10)$$

A velocidade tangencial limite fica expressa, quando em queda, por:

$$v_L=-a\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2a^2}\right)^{1/2}\frac{mgh}{2\pi C} \qquad (0{,}5) \qquad (11)$$

Questão 2 (3,5 pontos) A figura representa um sistema dinâmico composto por um anel rígido de raio *a* ligado a uma haste diametral também rígida, ambos feitos de uma mesma barra delgada. Uma mola não-linear prende um pequeno bloco de massa *m* ao anel. A mola tem massa desprezível, comprimento natural (indeformado) igual ao raio do anel e sua força de restauração é regida por uma função de energia potencial elástica:

$V_E(x) = \frac{1}{2}K_1x^2 + \frac{1}{4}K_3x^4;\ K_1 > 0;\ K_3 > 0$.



O bloco pode deslizar sobre a haste. O contato com a haste é lubrificado e impõe ao bloco uma força dissipativa viscosa, linearmente proporcional à velocidade relativa, de coeficiente *C*. O sistema gira em torno de um eixo fixo *Oz,* perpendicular à haste diametral, sob a ação de um motor elétrico que a ele aplica um torque, $\tau(t)$. O mancal proporciona torque reativo de natureza viscosa, linearmente proporcional a $\dot{\theta}$, com coeficiente *B*. É conhecido o momento de inércia *J* do subsistema rígido composto pelo anel e pela haste diametral em torno do eixo *Oz*. Considere as coordenadas generalizadas (x,θ). Pede-se:

(a) Construa as funções de energia cinética, $T = T(x,\dot{x},\dot{\theta})$, e de energia de dissipação de Rayleigh, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\dot{x},\dot{\theta})$, do sistema.

$$T = T(x,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (x\dot{\theta})^2] = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[J + mx^2]\dot{\theta}^2 \quad , \qquad (0,5) \qquad (1)$$

$$\mathcal{R}(\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}[C\dot{x}^2 + B\dot{\theta}^2]. \qquad (0,5) \qquad (2)$$

(b) Através do formalismo da Mecânica Analítica de Lagrange, deduza as equações que regem o movimento do sistema sob a ação do torque $\tau(t)$.

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc};\ \text{com}\ q_1 = x;\ q_2 = \theta \quad . \qquad (3)$$

Derivadas parciais e temporais:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = mx\dot{\theta}^2;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x};\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = [J + mx^2]\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial V_E}{\partial x} = K_1x + K_3x^3;\ \frac{\partial V_E}{\partial \theta} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{x}} = C\dot{x};\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} = B\dot{\theta} \quad . \qquad (0,5) \qquad (4)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = [J + mx^2]\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta}$$

Demais forças generalizadas não conservativas:

$$Q_1^{nc} = Q_x^{nc} = 0;\ \ Q_2^{nc} = Q_\theta^{nc} = \tau(t) \quad . \qquad (0,5) \qquad (5)$$

Equações de movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mx\dot{\theta}^2 + K_1x + K_3x^3 + C\dot{x} = 0 \\ [J + mx^2]\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} + B\dot{\theta} = \tau(t) \end{cases}$$

ou $\quad . \qquad (0,5) \qquad (6)$

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mx\dot{\theta}^2 + C\dot{x} + \left(K_1 + K_3x^2\right)x = 0 \\ [J + mx^2]\ddot{\theta} + \left(2mx\dot{x} + B\right)\dot{\theta} = \tau(t) \end{cases}$$

(c) Considerando a rotação conhecida e controlada (através do torque), de valor constante, $\dot{\theta} = \Omega$, determine as possíveis posições de equilíbrio dinâmico do bloco, $\bar{x}$, ao longo da haste. Considere dois casos: $\Omega < \omega^*$ e $\Omega > \omega^*$, com $\omega^* = \sqrt{K_1/m}$.

Com a rotação constante, Ω, o sistema de equações (6) fica escrito:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mx\Omega^2 + C\dot{x} + \left(K_1 + K_3 x^2\right)x = 0 \\ \left(2mx\dot{x} + B\right)\Omega = \tau(t) \end{cases} \quad . \qquad (7)$$

Ou seja, o torque a ser aplicado deve ser controlado por um atuador externo, de tal forma a manter a aceleração angular nula. A Eq. (7.a) pode então ser escrita:

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \left(\left(\omega^{*2} - \Omega^2\right) + \frac{K_3}{m}x^2\right)x = 0 \quad . \qquad (0,5) \qquad (8)$$

A condição de equilíbrio (dinâmico), relativo à haste, é dada portanto pela condição $x = \bar{x} \Rightarrow \dot{x} = \ddot{x} \equiv 0$. Assim, a EDO (8) se transforma em uma equação algébrica, na forma:

$$\left(\left(\omega^{*2} - \Omega^2\right) + \frac{K_3}{m}\bar{x}^2\right)\bar{x} = 0 \quad , \qquad (9)$$

que admite três possíveis posições de equilíbrio do bloco, relativamente à haste:

$$\bar{x} = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{\dfrac{m}{K_3}\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right)} = \pm\beta \end{cases} \qquad (0,5) \qquad (10)$$

A primeira raiz é a posição de equilíbrio trivial. Como $K_3 > 0$, as duas raízes simétricas só existirão (i.e., serão reais) se $\Omega \geq \omega^*$; ou seja, se a rotação imposta à haste for igual ou superior à rotação crítica $\omega^* = \sqrt{K_1/m}$. Se $\Omega < \omega^*$ só existirá uma posição de equilíbrio, a trivial. No caso limítrofe em que $\Omega \equiv \omega^*$, as duas raízes simétricas coalescem com o equilíbrio trivial.

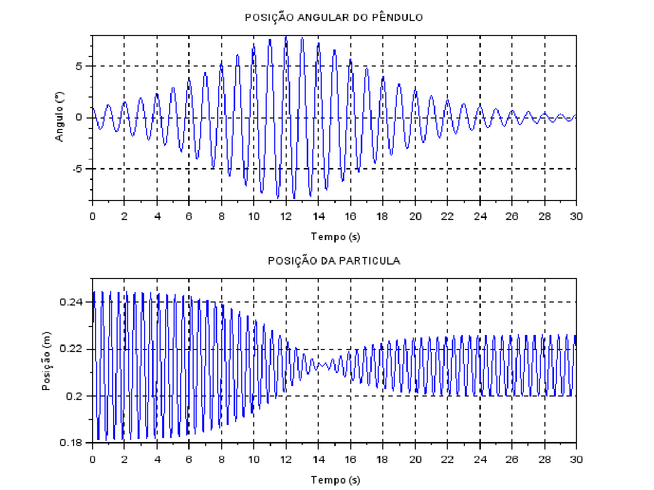
Questão 3 (3,0 pontos) Baseado no sistema composto pelo pêndulo articulado e massa de posição variável proposto no EMSC#3 de 2018, representado pelas seguintes funções de energia cinética, potencial e dissipativa, pede-se:

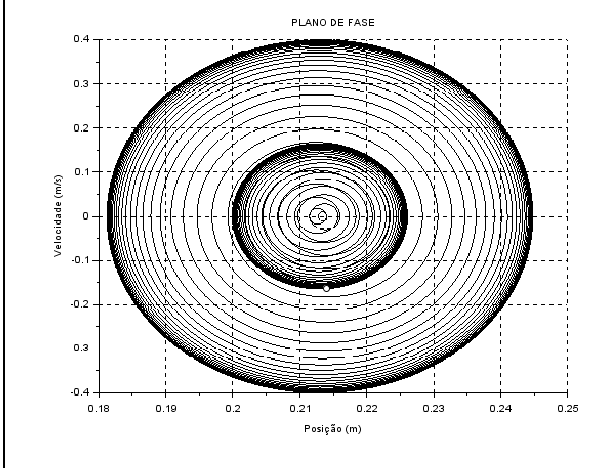
$$T = T(x, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{2}{3} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} mx^2 \dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$V = V(x, \theta) = \frac{1}{2} k(x-a)^2 - mg(x+L)\cos\theta \qquad \text{e} \qquad \Re = \Re(\dot{\theta}) = \frac{1}{2} c\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

a) Obtenha as equações de movimento linearizadas em torno da posição de equilíbrio e calcule as freqüências naturais f_1 e f_2 do sistema desacoplado não amortecido.

b) Os gráficos abaixo apresentam duas histórias temporais do movimento angular do pêndulo e movimento de translação da partícula (gráficos à esquerda) simulado para $\omega_{mm} = 2.0$ Hz e as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \pi/180$, $\dot{\theta}(0) = 0.0$, $x(0) = L$ e $\dot{x}(0) = 0.4$. O gráfico à direita mostra a projeção de trajetórias de fase no plano (x, $\dot{x}$) da partícula no sistema amortecido. Descreva o movimento de forma sucinta, analise e interprete os resultados e justifique o comportamento obtido baseado nos fundamentos de dinâmica.





Resolução da 3 Questão (3,0 pontos):

A partir das funções de energia cinética, potencial e dissipativa:

$$T = T(x,\dot{x},\dot{\theta}) = \frac{2}{3}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mx^2\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

$$V = V(x,\theta) = \frac{1}{2}k(x-a)^2 - mg(x+L)\cos\theta \quad \text{e} \quad \Re = \Re(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}c\dot{\theta}^2 \qquad (2)$$

a) Linearize as equações e calcule as frequências naturais f_1 e f_2 em torno da posição de equilíbrio do sistema desacoplado não amortecido ($\theta = 0$ e $x = L$): (2,0 pontos)

$$\sum_{k=1}^{2} a_{i,k}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{2} b_{i,k}q_k = Q_i \quad \text{para } i = 1, 2 \qquad a_{1,1} = \frac{7mL^2}{3} \quad \text{e} \quad a_{2,2} = m \qquad (3)$$

$$\beta_{1,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = mg(x+L)\cos\theta \quad \text{em torno da origem} \quad b_{1,1} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right)\Big|_{x=L}^{\theta=0} = 2mgL \qquad (4)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial x} = \beta_{2,1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\theta} = mg\,\text{sen}\,\theta \;\rightarrow\; b_{1,2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial x}\right)\Big|_{x=L}^{\theta=0} = b_{2,1} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial\theta}\right)\Big|_{x=L}^{\theta=0} = 0 \qquad (5)$$

$$\beta_{2,2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \quad \text{em torno da origem} \quad b_{2,2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\Big|_{x=L}^{\theta=0} = k \qquad (6)$$

Para a coordenada $q_1 = \theta$ utilizando os termos da matriz *Hessiana* acima, obtêm-se:

$$a_{1,1}\ddot{\theta} + a_{1,2}\ddot{x} + b_{1,1}\theta + b_{1,2}x = Q_1^{nc} \rightarrow \frac{7mL^2}{3}\ddot{\theta} + 2mgL\theta = -c\dot{\theta} \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + (6g/7L)\theta = -(3c/7mL^2)\dot{\theta}} \qquad (7)$$

Para a coordenada $q_2 = x$

$$a_{2,2}\ddot{x} + a_{2,1}\ddot{\theta} + b_{2,2}x + b_{2,1}\theta = 0 \rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \boxed{\ddot{x} + (k/m)x = 0} \qquad (8)$$

Portanto as freqüências naturais são: $\boxed{f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{6g/7L}}$ e $\boxed{f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}}$

b) O movimento inicial do sistema consiste dominantemente no movimento oscilatório da massa com frequência duas vezes maior que a oscilação do pêndulo, como pode ser observado na figura inferior à esquerda. Verifica-se que ao longo do tempo a magnitude da oscilação angular do conjunto aumenta (ver figura superior à esquerda em torno de 13 segundos) caracterizando a ressonância paramétrica. Neste caso há transferência de energia do modo de oscilação da partícula (que tem sua amplitude reduzida), para o modo de oscilação angular. Na figura à direita (gráfico do plano de fase) está apresentada a órbita da trajetória da partícula onde se destacam, as amplitudes de $x = \pm 0.032$ metros, que ocorre até o instante 4 segundos e $x = \pm 0.0125$ metros a partir do instante 24 segundos. (1,0 pontos)

Questão 4 (1,5 ponto).

Parte I. Baseada na palestra do dia 19/06, sobre Dinâmica de Sistemas de Massa Variável.

(a) Cite ao menos dois cientistas que atuaram no tema 'dinâmica de sistemas mecânicos de massa variável', destacando o contexto e sua principal contribuição. Cite ao menos dois exemplos de problemas abordados na palestra, ilustrando-os. (0,5)

I - Inúmeros são os cientistas que se dedicaram ao tema. De fundamental importância podemos citar:

1. *Von Buquoy*, cientista tcheco, de origem belga, início do século XIX; pioneiro e responsável pela primeira formulação explícita da equação de movimento de corpos de massa variável; ilustrou o equacionamento através do problema da corrente sendo suspensa de ou caindo sobre uma mesa.
2. *Arthur Cayley*, matemático britânico, meados do século XIX; formulou o problema da corrente sob a ótica da Mecânica Analítica.
3. *Ivan V. Meschchersky*, cientista russo, final do século XIX e início do século XX; responsável pela formalização da equação de movimento de sistemas materiais de massa variável e pela introdução de seu ensino no leste europeu; a quem se atribui a forma da segunda lei de Newton aplicável a pontos materiais de massa variável, conhecida como equação de Meschchersky.
4. *Levi-Civita*, matemático italiano, início do século XX; tratou o problema elementar de sistemas de massa variável quando a massa agregada/perdida tem velocidade nula com respeito ao referencial inercial considerado.
5. *McIver*, cientista inglês, século XX, década de 70; responsável pela extensão do Teorema do Transporte de Reynolds, através de formulação da Mecânica Analítica, no âmbito de sistemas de massa variável.
6. *Livja Cveticanin*, cientista sérvia, final do século XX e presente; formalização da mecânica analítica no contexto de sistemas de massa variável e autoria de livro específico no tema, aplicado à dinâmica de máquinas que exibem variação de massa.
7. *Hans Irschik*, mecanicista austríaco, final do século XX e presente; revisão do tema e dedução das equações de Lagrange para volumes não-materiais.

II – Exemplos de problemas abordados na palestra:

1. Diversas versões do 'problema da corrente': que cai a partir de uma mesa; que cai sobre uma mesa; em "U".
2. Problema do foguete: primeiro e segundo problemas de Tsiolkovsky.
3. Dinâmica da coluna d'água no interior de um tubo aberto e que atravessa a superfície livre de um líquido, na presença de campo gravitacional.
4. Colapso vertical de torres e edifícios.
5. Lançamento de cabos submarinos;
6. Problema de impacto de um corpo sólido contra a superfície de um líquido (impacto hidrodinâmico).
7. Problema elementar de uma partícula cuja massa varia com a posição.

(b) Enuncie o Princípio de Relatividade de Galileu. Mostre que a Equação atribuída a Mechersky satisfaz este princípio. (0,5)

O Princípio de Relatividade de Galileu afirma que *as leis fundamentais da física são as mesmas em todos referenciais inerciais*.

No caso em análise, considerando-se dois referenciais inerciais, define-se: (i) $\vec{v}$ como a velocidade da partícula medida em relação a um dos referenciais e (ii) $\vec{v}'$ como a velocidade da partícula medida em relação ao outro. Seja $\vec{v}_{rel}$ a velocidade relativa entre os dois referenciais inerciais, de forma que, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rel} \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}'$. Assim, a Equação de Mechersky pode ser transformada de um referencial para o outro como segue:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{w}\\ &= m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} - \frac{dm}{dt}\vec{w} = m\frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) - \frac{dm}{dt}(\vec{w}' + \vec{v}_{rel})\\ &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}') - \frac{dm}{dt}\vec{w}'\end{aligned}$$

Ou seja, a identidade, na forma, mostra a invariância da equação de Mechersky com respeito à escolha do referencial inercial.

Observa-se ainda que, ao contrário, a simples relação $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ depende da escolha do referencial e, portanto, não obedece ao Princípio de Relatividade de Galileu. De fato,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\ &= m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) \\ &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}') - \frac{dm}{dt}\vec{v}_{rel}\end{aligned}$$

Parte II. Complemento da Questão 2. Ainda com Ω constante, construa a função de energia potencial 'efetiva', $V(x) = V_E(x) + V_C(x)$, com $V_C = -\frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$, que é conhecida como função potencial centrífuga. Analisando esta função, discuta a estabilidade dos possíveis pontos de equilíbrio. (0,5)

Temos:

$$V(x) = \tfrac{1}{2}K_1 x^2 + \tfrac{1}{4}K_3 x^4 - \tfrac{1}{2}m\Omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2}\left(K_1 - m\Omega^2\right)x^2 + \tfrac{1}{4}K_3 x^4 \quad , \tag{1}$$

cuja derivada é dada por:

$$\frac{dV}{dx} = V'(x) = \left(K_1 - m\Omega^2\right)x + K_3 x^3 = \left[\left(K_1 - m\Omega^2\right) + K_3 x^2\right]x \quad . \tag{2}$$

A condição de equilíbrio é dada por $V'(x) \equiv 0$, que recupera a Eq. (9) da resolução da questão 2, cujas raízes são dadas pela Eq. (10). O ponto de equilíbrio em estudo será estável se $V'(\bar{x}) \equiv 0$. Ou seja, se a segunda derivada da função potencial for maior do que zero naquela posição. A segunda derivada é dada por:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = V''(x) = \left(K_1 - m\Omega^2\right) + 3K_3 x^2 = m\left(\omega^{*2} - \Omega^2\right) + 3K_3 x^2 = 3K_3 x^2 - m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) \quad . \tag{3}$$

Nos possíveis pontos de equilíbrio, $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = \pm\beta$, temos:

$$\begin{aligned}&V''(0) = -m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) \\ &\text{e} \\ &V''(\pm\beta) = 3K_3\beta^2 - m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) = 3K_3\frac{m}{K_3}\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) - m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) = 2m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right)\end{aligned} \quad . \tag{4}$$

Assim:

(i) Caso $\Omega < \omega^*$: só existe um ponto de equilíbrio, o trivial, $\bar{x} = 0$. O equilíbrio é estável, pois $V''(0) = -m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) > 0$.

(ii) Caso $\Omega > \omega^*$: existem três pontos de equilíbrio, $\bar{x} = 0$ e $\bar{x} = \pm\beta$. O ponto de equilíbrio trivial é instável (um ponto de sela), pois $V''(0) = -m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) < 0$. Os pontos de equilíbrio $\bar{x} = \pm\beta$ são estáveis, pois $V''(\pm\beta) = 2m\left(\Omega^2 - \omega^{*2}\right) > 0$.

(iii) Caso limítrofe $\Omega = \omega^*$: os pontos de equilíbrio $\bar{x} = \pm\beta$ coalescem com o ponto de equilíbrio trivial $\bar{x} = 0$. Nesta situação $V''(\bar{x}) = 0$. É o limiar da estabilidade de uns e outros. Trata-se, na linguagem da teoria de sistemas dinâmicos, de uma 'bifurcação estrutural'.