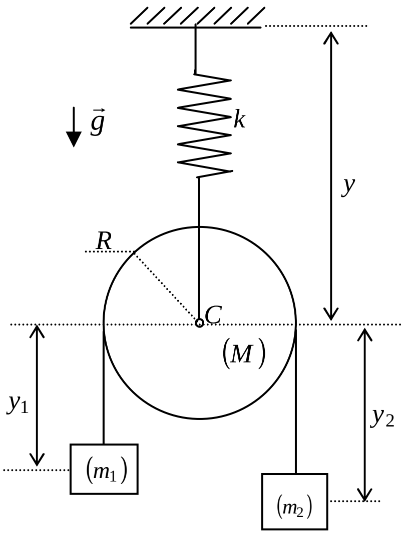
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Terceira Prova – 06 de julho de 2017
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar calculadoras, *notebooks* e dispositivos eletrônicos similares)



1ª Questão (3,0 pontos). O sistema material ilustrado na figura é constituído por dois blocos de massas m_1 e m_2 ligados por um cabo inextensível passante por uma polia de massa M e raio R, a qual é ligada a uma superfície fixa por meio de uma mola de constante elástica k. O comprimento natural da mola é ℓ_0 e não há escorregamento entre o cabo e a polia. Adotando y e y_1 como coordenadas generalizadas, pede-se determinar:

(a) a expressão da energia cinética do sistema;
(b) a expressão da energia potencial do sistema;
(c) as equações diferenciais que governam o movimento do sistema.

RESOLUÇÃO

Os movimentos dos blocos de massas m_1 e m_2 estão sujeitos ao vínculo

$$y_1 + \pi R + y_2 = c \qquad (1)$$

em que c é uma constante.

Derivando-se a equação acima, resulta:

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0 \Rightarrow \dot{y}_2 = -\dot{y}_1 \qquad (2)$$

A velocidade angular da polia é

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{R}\right) = \frac{\dot{y}_1}{R} \qquad (3)$$

A energia cinética do sistema é:

$$T = \frac{1}{2}\left[M\dot{y}^2 + m_1(\dot{y}+\dot{y}_1)^2 + m_2(\dot{y}+\dot{y}_2)^2 + \frac{MR^2}{2}\left(\frac{\dot{y}_1}{R}\right)^2\right]$$

Substituindo-se (2) e (3) na expressão acima resulta:

$$T = \frac{1}{2}\left[M\dot{y}^2 + m_1(\dot{y}+\dot{y}_1)^2 + m_2(y-\dot{y}_1)^2 + \frac{M}{2}\dot{y}_1^2\right] \qquad (4)$$ **(1 ponto)**

A energia potencial do sistema é:

$$V = \frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 - Mgy - m_1 g(y_1+y) - m_2 g(y_2+y)$$

Substituindo-se (1) na expressão acima, resulta

$$V = \frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 - Mgy - m_1 g(y_1+y) - m_2 g(c-\pi R-y_1+y) \qquad (5)$$ **(1 ponto)**

O lagrangeano do sistema é:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left[M\dot{y}^2 + m_1(\dot{y}+\dot{y}_1)^2 + m_2(\dot{y}-\dot{y}_1)^2 + \frac{M}{2}\dot{y}_1^2\right] - \left[\frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 - Mgy - m_1 g(y_1+y) - m_2 g(c-\pi R - y_1 + y)\right]$$

Para a coordenada y tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

- $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = M\dot{y} + m_1(\dot{y}+\dot{y}_1) + m_2(\dot{y}-\dot{y}_1)$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = (M + m_1 + m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2)\ddot{y}_1$
- $\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = -k(y-\ell_0) + (M + m_1 + m_2)g$

Para a coordenada y_1 tem-se:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$
- $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) = m_1(\dot{y}+\dot{y}_1) - m_2(\dot{y}-\dot{y}_1) + \frac{M}{2}\dot{y}_1$
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right) = (m_1 - m_2)\ddot{y} + \left(m_1 + \frac{M}{2} + m_2\right)\ddot{y}_1$
- $\left(\frac{\partial L}{\partial y_1}\right) = (m_1 - m_2)g$

As equações diferenciais que governam o movimento do sistema são:

- $(M + m_1 + m_2)\ddot{y} + (m_1 - m_2)\ddot{y}_1 + k(y-\ell_0) - (M + m_1 + m_2)g = 0$ (6) **(½ ponto)**
- $(m_1 - m_2)\ddot{y} + \left(m_1 + \frac{M}{2} + m_2\right)\ddot{y}_1 - (m_1 - m_2)g = 0$ (7) **(½ ponto)**

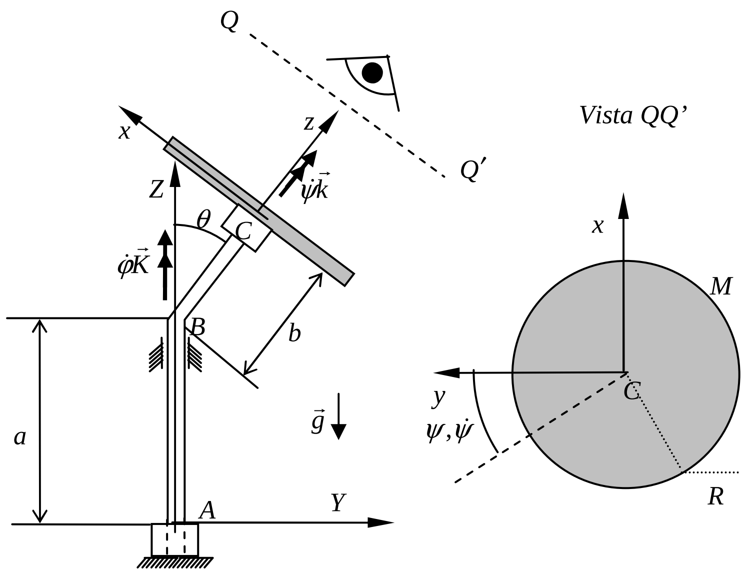
Escrevendo-se essas equações na forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & m_1 - m_2 \\ m_1 - m_2 & \frac{M}{2} + m_1 + m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\ell_0 + (M + m_1 + m_2)g \\ (m_1 - m_2)g \end{bmatrix}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos). A haste *ABC*, de massa desprezível e dimensões indicadas na figura, gira em torno do eixo vertical com velocidade angular $\dot{\varphi}(t)\vec{K}$ sob a ação de um torque $T_A(t)$ fornecido por um motor M_A acoplado à extremidade *A*. Na extremidade *C* da haste há um segundo motor M_C, de massa desprezível, que aplica um torque $T_C(t)$ a um disco de massa M, raio R e centro *C*, forçando-o a girar com velocidade angular $\dot{\psi}(t)\vec{k}$ em relação à haste *ABC*. Ambos os sistemas de coordenadas mostrados na figura – $AXYZ$ (associado à base $\vec{I}\vec{J}\vec{K}$) e $Cxyz$ (associado à base $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) **<u>são ligados à haste *ABC*</u>**. O eixo Cx pertence ao plano ABC. Adotando φ (rotação em torno do eixo vertical Z) e ψ (rotação em torno do eixo Cz) como coordenadas generalizadas, determinar:



(a) o vetor rotação absoluta do disco descrito no sistema de eixos $Cxyz$, ligado à haste *ABC*;
(b) a expressão da energia cinética do sistema;
(c) a expressão da energia potencial do sistema;
(d) a expressão das forças generalizadas agentes no sistema;
(e) as equações diferenciais que governam o movimento do sistema.

RESOLUÇÃO

O vetor rotação absoluta do disco é dado por:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\psi}\vec{k} = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k}\right) + \dot{\psi}\vec{k} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{i} + \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\vec{k} \qquad (1)$$ **(½ ponto)**

A velocidade do ponto *C* do disco é,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}\wedge(C-B) = \vec{0} + \left[\dot{\varphi}\sin\theta\vec{i} + \left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\vec{k}\right]\wedge b\vec{k} = -b\dot{\varphi}\sin\theta\vec{j} \qquad (2)$$ **(½ ponto)**

A energia cinética do disco é dada por

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(J_{Cx}\omega_x^2 + J_{Cy}\omega_y^2 + J_{Cz}\omega_z^2\right) \qquad (3)$$

Substituindo-se (1) e (2) na equação acima, tem-se:

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\left(J_{Cx}\omega_x^2 + J_{Cy}\omega_y^2 + J_{Cz}\omega_z^2\right) = \frac{1}{2}M\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{MR^2}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}Mb^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{MR^2}{2}\left(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta\right)\right] =$$

$$\therefore T = \frac{1}{2}Mb^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{MR^2}{8}\left[\dot{\varphi}^2\left(1+\cos^2\theta\right) + 2\left(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta\right)\right] \qquad (4)$$ **(½ ponto)**

A energia potencial do sistema é constante. Adotando-se como referência a cota $Z = 0$, tem-se:

$V = (a + b\cos\theta)Mg$ (5) **(½ ponto)**

Para determinar as forças generalizadas agentes no sistema realizamos dois experimentos virtuais – um com $\delta\varphi \neq 0, \delta\psi = 0$, outro com $\delta\varphi = 0, \delta\psi \neq 0$.

Do primeiro experimento resulta o trabalho virtual

$\delta\tau = \vec{M}_A^{ext} \cdot \delta\varphi\vec{k}_1 = T_A\delta\varphi$

Do segundo, resulta:

$\delta\tau = \vec{M}_C^{ext} \cdot \delta\psi\vec{k} = T_C\delta\psi$

Portanto, as forças generalizadas que agem no sistema, são:

$F_\varphi = T_A$ e $F_\psi = T_C$ **(½ ponto)**

Introduzindo-se nas equações de Lagrange as expressões da energia cinética, energia potencial e das forças generalizadas, obtêm-se as equações diferenciais que governam o movimento do sistema.

Para a coordenada φ, tem-se:

- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = F_\varphi$
- $\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = Mb^2\sin^2\theta\dot\varphi + \dfrac{MR^2}{4}\left(1+\cos^2\theta\right)\dot\varphi + \dfrac{MR^2}{2}\cos\theta\dot\psi$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = Mb^2\sin^2\theta\ddot\varphi + \dfrac{MR^2}{4}\left(1+\cos^2\theta\right)\ddot\varphi + \dfrac{MR^2}{2}\cos\theta\ddot\psi = \dfrac{M}{4}\left[4b^2\sin^2\theta + R^2\left(1+\cos^2\theta\right)\right]\ddot\varphi + \dfrac{MR^2}{2}\cos\theta\ddot\psi$
- $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$

$\therefore \left[4b^2\sin^2\theta + R^2\left(1+\cos^2\theta\right)\right]\ddot\varphi + 2R^2\cos\theta\ddot\psi = \dfrac{4T_A(t)}{M}$ (6) **(½ ponto)**

Para a coordenada ψ , tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial V}{\partial\psi} = F_\psi$$

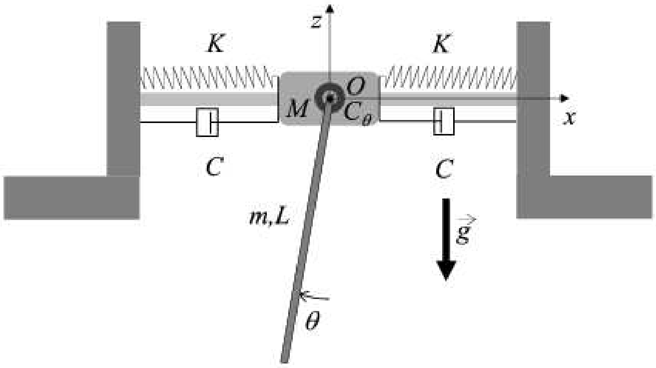
- $\dfrac{\partial T}{\partial\dot\psi} = \dfrac{MR^2}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) = \dfrac{MR^2}{2}\left(\ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta\right)$
- $\dfrac{\partial F}{\partial\psi} = 0$

$\therefore \ddot\psi + \ddot\varphi\cos\theta = \dfrac{2T_C(t)}{MR^2}$ (7) **(½ ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos). O dispositivo da figura é composto por um bloco de massa M e uma barra de massa m e comprimento L. O bloco pode deslizar sem atrito ao longo de uma guia horizontal de seção quadrada. O bloco é vazado por um furo de mesma seção quadrada, de forma a envolver a guia completamente, como uma luva. A barra, de distribuição homogênea de massa, está ligada a um amortecedor rotacional de constante C_θ , fixo ao bloco em O; assim, a barra pode girar livremente em torno do eixo Oy, perpendicular ao plano da figura. O bloco está ligado às peças verticais através de duas molas idênticas, de constante K e de dois amortecedores lineares idênticos de constante C. O conjunto está sujeito à ação do campo gravitacional. Pede-se:



(a) escrever as funções energia cinética, energia potencial e potencial dissipativo de Rayleigh;
(b) escrever as equações diferenciais do movimento;
(c) determinar as posições de equilíbrio do sistema;
(d) descrever brevemente com suas palavras o efeito de se remover do sistema o amortecedor rotacional, porém preservando-se os demais.

RESOLUÇÃO

A velocidade do centro de massa da barra, é:

$$\vec v_G = \dot x\vec i + \dot\theta\vec j \wedge (G-O) = \dot x\vec i + \dot\theta\vec j \wedge \left(-\frac{L}{2}\sin\theta\vec i - \frac{L}{2}\cos\theta\vec k\right) = \left(\dot x - \dot\theta\frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec i + \dot\theta\frac{L}{2}\sin\theta\vec k \qquad (1)$$

A função energia cinética do sistema, é:

$$T = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{Gy}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot x - \dot\theta\frac{L}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\dot\theta\frac{L}{2}\sin\theta\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot\theta^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot x^2 + \dot\theta^2\frac{L^2}{4} - \dot x\dot\theta L\cos\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot\theta^2 \qquad (2)$$ **(½ ponto)**

A função potencial do sistema, é:

$$V = mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + kx^2 \qquad (3)$$ **(½ ponto)**

O lagrangeano do sistema, é:

$$L = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot x^2 + \dot\theta^2\frac{L^2}{4} - \dot x\dot\theta L\cos\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot\theta^2 - mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) - kx^2 \qquad (4)$$

A função potencial dissipativa de Rayleigh, é:

$$R = \frac{1}{2}c\dot x^2 + \frac{1}{2}c\dot x^2 + \frac{1}{2}c_\theta^2 = c\dot x^2 + \frac{1}{2}c_\theta\dot\theta^2 \qquad (5)$$ **(½ ponto)**

Para a coordenada generalizada x , tem-se:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + \dfrac{1}{2} m\dot{\theta}L\cos\theta$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m)\ddot{x} + \dfrac{1}{2} mL\left(-\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2 \sin\theta\right)$
- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -2kx$
- $\dfrac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 2c\dot{x}$
- $\therefore (M + m)\ddot{x} - \dfrac{1}{2} mL\cos\theta\ddot{\theta} + \dfrac{1}{2} mL\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2kx + 2c\dot{x} = 0$ **(½ ponto)**

Para a coordenada generalizada θ, tem-se:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{1}{3} mL^2\dot{\theta} + \dfrac{1}{2} mL\dot{x}\cos\theta$
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dfrac{1}{3} mL^2\ddot{\theta} + \dfrac{1}{2} mL\left(-\ddot{x}\cos\theta + \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -\dfrac{1}{2} mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mg\dfrac{L}{2}\sin\theta = -\dfrac{L}{2} m\left(\dot{x}\dot{\theta} + g\right)\sin\theta$
- $\dfrac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = c_\theta\dot{\theta}$
- $\therefore -\dfrac{1}{2} mL\cos\theta\ddot{x} + \dfrac{1}{3} mL^2\ddot{\theta} + mg\dfrac{L}{2}\sin\theta + c_\theta\dot{\theta} = 0$ **(½ ponto)**

Portanto, o movimento do sistema é governado pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - \dfrac{1}{2} mL\cos\theta\ddot{\theta} + \dfrac{1}{2} mL\sin\theta\dot{\theta}^2 + 2kx + 2c\dot{x} = 0 \\ -\dfrac{1}{2} mL\cos\theta\ddot{x} + \dfrac{1}{3} mL^2\ddot{\theta} + mg\dfrac{L}{2}\sin\theta + c_\theta\dot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

As posições de equilíbrio do sistema são obtidas impondo-se $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0$. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2kx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 : \textit{equilíbrio estável} \\ \theta = \pi : \textit{equilíbrio instável} \end{cases}$$

(½ ponto)

Note-se que, no sistema de equações diferenciais não lineares (6), as variáveis x e θ estão acopladas, ou seja, a evolução temporal de x é afetada pela de θ e reciprocamente. Por esse motivo, a eliminação do amortecedor rotacional não promove o movimento de θ à condição de *movimento não amortecido*. Note-se que o sistema continua a perder energia mecânica, em virtude da ação dos amortecedores lineares. Essa perda faz com que a amplitude de x diminua com o tempo e, em virtude do acoplamento das variáveis x e θ, a amplitude do movimento angular da barra também é diminuída gradualmente. A mudança efetiva que ocorre com a remoção do amortecedor rotacional diz respeito às taxas de decaimento das amplitudes de x e θ: estas diminuirão comparativamente com as anteriormente observadas. Em outras palavras, os movimentos assintóticos de ambas as coordenadas x e θ convergirão para o nó estável $x = 0, \theta = 0$, mas em um tempo superior ao que caracterizava o sistema provido de amortecedor rotacional.

(½ ponto)

4ª Questão (1,0 ponto). Refere-se à palestra de 20/06/2017 sobre o tema 'Sistemas de Massa Variável'.

(a) Enuncie, com suas palavras, o Princípio da Relatividade de Galileu (*PRG*).

(b) Mostre que a forma de Levi-Civita, ou seja, $\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases}$, **não** satisfaz ao *PRG*, ao passo que a forma de Meshchersky, ou seja, $\begin{cases} m\vec{a} = \vec{F} + \left(\dfrac{dm}{dt}\right) \cdot \vec{v}_{rel} \\ \vec{v}_{rel} = \vec{w} - \vec{v} \end{cases}$, em que $\vec{w}$ é a velocidade da massa acrescida ou perdida em relação ao referencial inercial, ***satisfaz*** a esse princípio.

RESOLUÇÃO

O Princípio da Relatividade de Galileu afirma que *as leis fundamentais da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais*.

No caso em análise, considerando-se dois referenciais inerciais, define-se: a) $\vec{v}$ como a velocidade da partícula medida em relação a um dos referenciais e b) $\vec{v}'$ como a velocidade da partícula medida em relação ao outro. Seja $\vec{v}_{rel}$ a velocidade relativa entre os dois referenciais, de forma que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rel} \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}'$. Assim, a Equação de Meshchersky pode ser transformada de um referencial para outro como segue:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{w} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{w} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) + m\frac{d\vec{v}'}{dt} - \frac{dm}{dt}(\vec{w}' + \vec{v}_{rel}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}') - \frac{dm}{dt}\vec{w}'$$

Note-se que a identidade, na forma, mostra a invariância da Equação de Meshchersky com respeito à escolha do referencial inercial.

Procedendo-se analogamente com a simples relação $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$, ou seja, fazendo-se

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) + m\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}') + \frac{dm}{dt}\vec{v}_{rel}$$

nota-se que ela depende da escolha do referencial inercial, ou seja, não obedece ao Princípio da Relatividade de Galileu.