

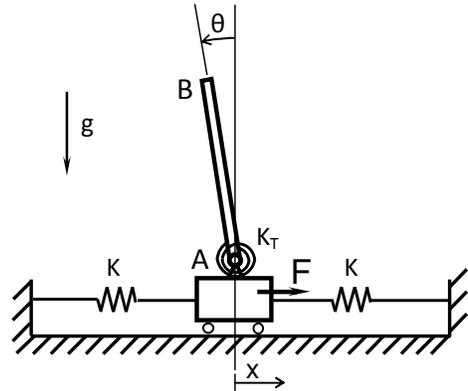


**PME 3200 – MECÂNICA II – 3ª Prova – 23 de junho de 2016**

**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

**1ª Questão (3,5 pontos)**

No sistema mostrado na figura, o bloco de massa  $M$  está acoplado a duas molas de rigidez  $K$ . O ponto central  $A$  do bloco está articulado a uma barra  $AB$ , de massa  $m$  e comprimento  $l$ . Na articulação  $A$  há uma mola rotacional linear de constante de rigidez  $K_T$ . As molas lineares têm deformação nula quando a coordenada  $x$  do ponto  $A$  vale zero e a mola rotacional tem deformação nula quando  $\theta = 0$ . Uma força horizontal  $\vec{F}(t)$  está aplicada no bloco. Usando  $x$  e  $\theta$  como coordenadas generalizadas:



- Escreva as funções de energia cinética,  $T = T(\dot{x}, \dot{\theta})$ , e potencial  $V = V(x, \theta)$ .
- Deduza as equações de movimento usando o método de Lagrange.
- Seja  $\mathbf{q} = [x \ \theta]^T$  o vetor de coordenadas generalizadas. Mostre que  $\bar{\mathbf{q}} = [0 \ 0]^T$  é um ponto de equilíbrio e linearize as equações de movimento em torno deste ponto.
- Escreva as equações linearizadas na forma matricial,  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$ , construindo explicitamente as matrizes de Massa,  $\mathbf{M}$ , e rigidez,  $\mathbf{K}$ .

*Resolução:*

(a) Energia cinética:  $T = T_{Barra} + T_{Bloco}$

$$T_{Bloco} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$T_{Barra} = \frac{1}{2} m \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A + m \vec{V}_A \cdot \left[ \vec{\theta} \wedge (G - A) \right] + \frac{1}{2} \{ \dot{\theta} \}^T [I_A] \{ \dot{\theta} \}, \text{ em que } \vec{V}_A = \dot{x} \vec{i}$$

$$\Rightarrow T_{Barra} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \vec{i} \cdot \left[ (\dot{\theta}) \vec{k} \wedge \left( -\frac{l}{2} \text{sen} \theta \vec{i} + \frac{l}{2} \text{cos} \theta \vec{j} \right) \right] + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2, \text{ com } J_A = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Rightarrow T_{Barra} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\theta} \frac{l}{2} \text{cos} \theta + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\theta} \frac{l}{2} \text{cos} \theta + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (0,5)$$

$$\text{Energia potencial: } V = V_{Grav} + V_{Elástica} = mg \frac{l}{2} \text{cos} \theta + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} K_T \theta^2$$

$$\Rightarrow V = K x^2 + mg \frac{l}{2} \text{cos} \theta + \frac{1}{2} K_T \theta^2 \quad (0,5)$$

$$\text{Função Lagrangeana: } L = T - V = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\theta} \frac{l}{2} \text{cos} \theta + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 - K x^2 - mg \frac{l}{2} \text{cos} \theta - \frac{1}{2} K_T \theta^2$$

$$\text{Função dissipativa de Rayleigh: } R = 0$$

$$\text{Trabalho virtual } \delta W = F \delta x \Rightarrow \text{forças generalizadas } Q_x = F \frac{\partial x}{\partial x} = F \text{ e } Q_\theta = F \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0 \quad (0,5)$$



(b) Equações de Lagrange:

Coordenada x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m\dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M + m)\ddot{x} - m\frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + m\dot{\theta}^2\frac{l}{2}\sin\theta \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -2Kx$$

$$\Rightarrow \boxed{(M + m)\ddot{x} - m\frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + m\dot{\theta}^2\frac{l}{2}\sin\theta + 2Kx = F}$$

Coordenada  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -m\dot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -m\ddot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + m\dot{x}\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{x}\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta} + mg\frac{l}{2}\sin\theta - K_T\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{-m\ddot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} - mg\frac{l}{2}\sin\theta + K_T\theta = 0} \quad (0,5)$$

(c)  $\frac{\partial V}{\partial x} = 2Kx \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ ;  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_T\theta - 2mg\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0$ , portanto  $\bar{\mathbf{q}} = [0 \quad 0]^T$  é ponto de equilíbrio (0,5)

Linearização

$\sum_{k=1}^2 a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^2 b_{ik}q_k = Q_i$ , para  $i=1,2$ , em que  $i=1$  refere-se à coordenada  $x$  e  $i=2$  refere-se a  $\theta$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = M + m \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \theta} = -\frac{ml}{2}\cos\theta \xrightarrow{\theta=0} \begin{cases} a_{11} = M + m \\ a_{12} = a_{21} = -\frac{ml}{2} \\ a_{22} = \frac{ml^2}{3} \end{cases} \\ \alpha_{22} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{ml^2}{3} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{x=0, \theta=0} = 2K \\ b_{12} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\Big|_{x=0, \theta=0} = 0 \quad \text{e} \quad b_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\Big|_{x=0, \theta=0} = 0 \\ b_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\Big|_{x=0, \theta=0} = K_T + \frac{mgl}{2} \end{cases}$$

Coordenada x:

$$a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\theta} + b_{11}x + b_{12}\theta = Q_x \Rightarrow \boxed{(M + m)\ddot{x} - m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2Kx = F}$$

Coordenada  $\theta$ :

$$a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\theta} + b_{21}x + b_{22}\theta = Q_\theta \Rightarrow \boxed{-m\frac{l}{2}\ddot{x} + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} + K_T\theta - mg\frac{l}{2}\theta = 0} \quad (0,5)$$

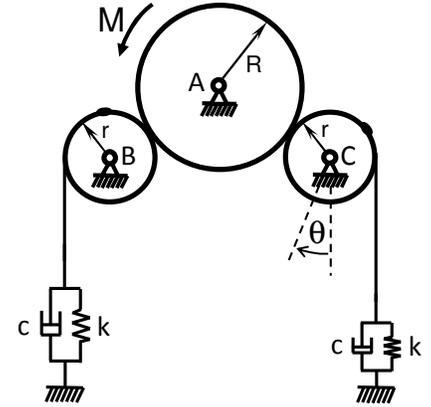
(d) Na forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} M + m & -m\frac{l}{2} \\ -m\frac{l}{2} & m\frac{l^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & K_T - m\frac{gl}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (0,5)$$



**2ª Questão (3,5 pontos)**

No sistema mostrado na figura, o disco de centro  $A$  possui massa  $m$  e raio  $R$  e rola sem escorregar em relação aos discos de centro  $B$  e centro  $C$ , ambos de massa  $m/2$  e raio  $r = R/2$ . As periferias dos discos de centro  $B$  e  $C$  estão acopladas a molas de rigidez  $k$  e amortecedores viscosos lineares de constante  $c$ . Um torque  $\vec{M}(t) = M_o \cos \omega t \vec{k}$  está aplicado ao disco de centro  $A$ . Utilizando a coordenada generalizada  $\theta$ , e assumindo que as molas estão sempre tracionadas e têm deformação nula quando a coordenada  $\theta$  vale  $\theta_o$ , pede-se:



- A energia cinética do sistema.
- A energia potencial do sistema.
- A função de dissipação de Rayleigh do sistema.
- As equações de movimento para a coordenada  $\theta$ , usando o método de Lagrange.

*Resolução:*

Definindo como  $\phi$  o ângulo de rotação do disco de centro  $A$ , tem-se, considerando-se o contato dos

$$\text{discos: } \phi R = \theta r = \theta \frac{R}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\theta}{2} \text{ e } \dot{\phi} = \frac{\dot{\theta}}{2}$$

- (a) Energia cinética: Para cada um dos discos

$$T_{\text{Disco}} = \frac{1}{2} m \vec{V}_o \cdot \vec{V}_o + m \vec{V}_o \cdot [\vec{\omega} \wedge (G - O)] + \frac{1}{2} \{\omega\} [I_o] \{\omega\}, \text{ em que } O \text{ é o centro do disco, com } \vec{V}_o = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} J_A \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{8} \quad (1,0)$$

- (b) Energia potencial: A deformação  $x$  de cada mola é dada por  $x = r(\theta - \theta_o) = \frac{R}{2}(\theta - \theta_o)$

$$\Rightarrow V = k \left[ \frac{R}{2} (\theta - \theta_o) \right]^2 \quad (1,0)$$

$$\text{Função Lagrangeana: } L = T - V = \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{8} - k \left[ \frac{R}{2} (\theta - \theta_o) \right]^2$$

- (c) Função de dissipação de Rayleigh: Para cada amortecedor  $\dot{x} = r\dot{\theta} = \frac{R}{2}\dot{\theta} \Rightarrow R = \frac{cR^2 \dot{\theta}^2}{4} \quad (0,5)$

- (d) Forças generalizadas: Trabalho virtual  $\delta W = M \delta \phi \Rightarrow Q_\theta = M \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{M}{2} \quad (0,5)$

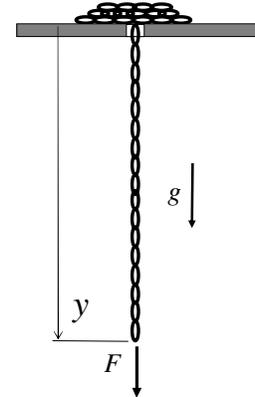
$$\text{Equação de Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mR^2 \dot{\theta}}{4} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{mR^2}{4} \ddot{\theta} ; \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2rk(\theta - \theta_o) \text{ e } \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 2cr^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{mR^2}{4} \ddot{\theta} + \frac{kR^2(\theta - \theta_o)}{2} + \frac{cR^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{M}{2} \quad \text{ou usando raio } r \quad mr^2 \ddot{\theta} + 2kr^2(\theta - \theta_o) + 2cr^2 \dot{\theta} = \frac{M}{2} \quad (0,5)$$



**3ª Questão (1,0 ponto). Baseada na palestra proferida em 16/06/2016.**

- (a) Cite o nome de três eminentes cientistas que trataram do tema “mecânica dos sistemas de massa variável”, comentando suas respectivas contribuições no contexto da história da ciência.
- (b) A figura ao lado mostra a idealização de um problema clássico da mecânica dos sistemas de massa variável. Como é denominado este problema na literatura científica e qual sua relevância? Quais são as principais hipóteses simplificadoras usualmente adotadas em sua formulação?



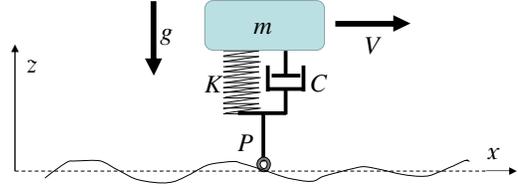
*Resolução:*

- (a) São inúmeros os nomes que podem ser citados, de eminentes cientistas que trataram do tema. Dentre muitos, podemos citar:
- von Buquoy, cientista tcheco quem historicamente, em 1812, deu o primeiro tratamento ao problema idealizado da corrente em queda sob a ação da gravidade, ou dela suspensa a partir de uma mesa;
  - Poisson, em 1819, discutindo o trabalho de von Buquoy; Cayley, quem tratou do mesmo tipo de problema, via Mecânica Analítica, em meados do século XIX;
  - Mescherskii, cientista russo quem, em 1894, publicou importante monografia (dissertação) sobre a correta aplicação da segunda Lei de Newton para partículas que perdem ou ganham massa, forma esta que recebeu seu nome de na literatura especializada;
  - Levi-Civita, eminente mecanicista e matemático italiano, quem formulou o problema particular, que leva o seu nome, no qual a velocidade da massa que é perdida (ou ganha) adquire (tem) velocidade nula imediatamente após o (antes do) evento, velocidade esta medida em relação ao mesmo referencial inercial com respeito ao qual o movimento da partícula em estudo é medido;
  - McIver, quem em 1973 enunciou extensão do Princípio de Hamilton, na forma do Teorema do transporte de Reynolds, para o devido tratamento de sistemas de massa variável sob a ótica de volumes e superfícies não-materiais;
  - Cveticanin, cientista sérvia, contemporânea, que desde a década de 1990, se dedica ao estudo de mecanismos e sistemas multi-corpos de massa variável, com aplicações industriais;
  - Irschik, mecanicista austríaco, contemporâneo, quem se dedica à formalização matemática de sistemas contínuos de massa variável;
  - Casetta, mecanicista brasileiro, que vem se dedicando ao estudo de problemas inversos, aos princípios variacionais e à formalização matemática de sistemas discretos e contínuos de massa variável, incluindo uma generalização adicional do enunciado de McIver. **(0,5)**
- (b) O problema idealizado, ilustrado na figura, é denominado *Problema de Cayley*. Constitui-se no problema clássico do estudo da dinâmica de sistemas de massa variável, sempre aludido quando da discussão formal do tema. Representa uma classe de problemas em que a massa de um subsistema pode ser considerada como explicitamente dependente da posição (no caso a parte suspensa). Esta classe de problemas invariavelmente conduz a falsos paradoxos, à medida em que duas formas distintas de equação de movimento podem ser deduzidas (uma delas errônea), se a correta forma da Equação de Lagrange não for devidamente empregada. De fato, a dedução da equação de movimento feita por Cayley, baseou-se em uma variante específica da equação de Lagrange, mais tarde demonstrada a partir de princípios variacionais, por Cveticanin, 1993 e por Pesce, 2003, em contexto mais abrangente. As principais hipóteses simplificadoras adotadas na formulação deste problema são:
- A parte suspensa da corrente é tratada como um corpo rígido em translação vertical pura, continuamente aumentado em seu tamanho;
  - Não há qualquer forma de atrito agindo entre os elos ou entre eles e a mesa de suporte;
  - Admite-se que o elo que deixa a mesa é subitamente acelerado, adquirindo imediatamente a velocidade da parte suspensa, desprezando-se qualquer outra forma de transferência de quantidade de movimento;
  - A velocidade da parte de corrente empilhada é tomada como nula; ou seja, esta parte é vista como uma fonte ideal de massa em repouso. **(0,5)**

**4ª Questão (3,0 pontos). Baseada no EMSC2016.**

Adotando-se hipóteses simplificadoras, pode-se supor que o ponto  $P$  esteja sempre em contato com a pista e que o conjunto permaneça na vertical. São conhecidos o comprimento da haste vertical inferior,  $h$ , e o comprimento natural da mola,  $b$ . Também é conhecido o perfil da pista  $a(x)$ . Através do formalismo de Lagrange, foi deduzida a equação de movimento do bloco, em torno da configuração de equilíbrio estático,  $\bar{z} = h + b - mg/K$ , chegando-se a:

$m\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = C\dot{z}_p + Kz_p$ , onde  $\eta(t) = z(t) - \bar{z}$ .



*Resolução:*

- (a) Determine, analiticamente, a frequência natural *não amortecida*,  $\omega_n$ , e a correspondente *amortecida*,  $\omega_d$ .

A frequência natural não amortecida pode ser prontamente calculada a partir do problema de autovalor (ou de valor característico) associado ao correspondente oscilador linear

homogêneo, não-amortecido,  $m\ddot{\eta} + K\eta = 0$ , resultando:  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ .

A frequência natural amortecida segue da solução do problema de valor característico do oscilador linear homogêneo, amortecido,  $m\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = 0$ , resultando  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , com  $\zeta = C/C_{cr}$ , onde  $C_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$  é denominado valor crítico do parâmetro de amortecimento viscoso linear. (0,5)

- (b) Particularize a equação dinâmica que rege  $\eta(t)$  para o caso em que  $a(x) = A \sin(2\pi x/\lambda)$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da senóide. Para isso, tome  $x(0) = 0$ , tal que  $x(t) = Vt$  e a frequência de excitação, associada ao movimento do sistema ao longo da pista, seja dada por  $\omega = 2\pi V/\lambda$ .

Tomando-se  $z_p = (a(x(t))) = A \sin(2\pi Vt/\lambda) = A \sin \omega t$ , com  $\omega = 2\pi V/\lambda$ , segue que  $\dot{z}_p = \omega A \cos \omega t$ . Desta forma, a equação de movimento fica então escrita:

$$m\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = A(C\omega \cos \omega t + K \sin \omega t) \quad (0,5)$$

- (c) Fornecida a rotina de simulação em ambiente SCILAB, foram solicitadas diversas simulações. Os gráficos (a), (b), (c), da figura abaixo, mostram os resultados de algumas delas, apresentando o deslocamento imposto pela via e o deslocamento do bloco em função do tempo. Pedem-se *discriminá-las de forma justificada*, associando-as a uma das três situações: (i) de baixa velocidade, para a qual  $\omega < \omega_d$ ; (ii) de velocidade intermediária,  $\omega = \omega_d$ ; (iii) de alta velocidade,  $\omega > \omega_d$ .

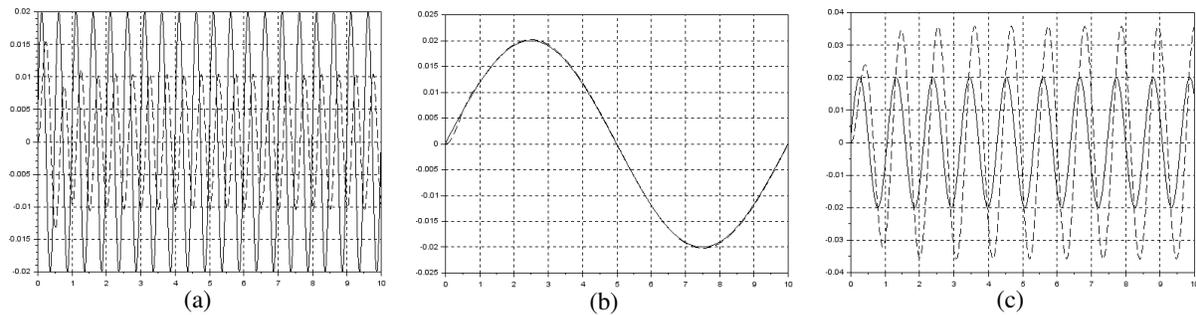


Figura 1. Deslocamento (m) vs tempo (s): imposto pela pista (—) e do bloco (- - -).

A tabela abaixo traz a discriminação solicitada, com as devidas justificativas:

(1,0)

Gráfico	Situação	Comentário justificativo
(a)	(iii)	Trata-se do caso de alta velocidade, quando a frequência de excitação $\omega = 2\pi V / \lambda$ é elevada, de tal sorte que a razão de frequências, $\omega / \omega_n = 2\pi V / (\lambda \omega_n) = V / (\lambda f_n)$ , apresenta valor elevado. A resposta estacionária do sistema dinâmico, quando o transitório já evanesceu, é dita 'supercrítica', por ser superressonante. A amplitude de movimento do bloco é inferior à amplitude do movimento imposto, caracterizando-se 'ganho' menor do que 1. A fase relativa entre os deslocamentos é próxima de 180 graus, ou seja o movimento do bloco é contrário ao movimento imposto. Diz-se que os sinais estão em quase-antífase.
(b)	(i)	Trata-se do caso de baixa velocidade, quando a frequência de excitação $\omega = 2\pi V / \lambda$ é pequena, de tal sorte que a razão de frequências, $\omega / \omega_n = 2\pi V / (\lambda \omega_n) = V / (\lambda f_n)$ , apresenta valor pequeno. Na realidade, no caso apresentado tem-se $\omega \ll \omega_n$ . A resposta estacionária do sistema dinâmico é dita 'quase-estática' ou 'subcrítica', por ser subressonante. Note que o deslocamento do bloco é praticamente idêntico ao deslocamento imposto pela pista, e a fase relativa entre os dois é praticamente nula.
(c)	(ii)	Trata-se de caso de velocidade intermediária, em que a frequência de excitação é igual à frequência natural amortecida. Ou seja, a resposta estacionária do sistema é ressonante. A amplitude de movimento do bloco é superior à amplitude do movimento imposto, caracterizando-se 'ganho' maior do que 1. A fase relativa entre os deslocamentos é próxima de -90 graus, ou seja o movimento do bloco está atrasado em relação ao movimento imposto de cerca de 90 graus. Diz-se que os sinais estão em quase-quadratura.

(d) Esboce a resposta estacionária do sistema (i.e., quando  $\eta(t) \rightarrow B \sin(\omega t + \phi)$ ) em função da razão de frequências,  $\omega / \omega_n = 2\pi V / (\lambda \omega_n) = V / (\lambda f_n)$ . Faça dois gráficos, o primeiro mostrando a amplitude de movimento  $B/A$  ('ganho') e o segundo sua fase relativa,  $\phi$ . Destaque nos gráficos o ponto de passagem pela ressonância. Dados usados nas simulações:  $m = 500 \text{ kg}$ ;  $K = 19,74 \text{ kN/m}$ ;  $C = 2,20 \text{ kN/(m/s)}$ ;  $\lambda = 10 \text{ m}$ ;  $A = 2 \text{ cm}$ ;  $1 \text{ m/s} \leq V \leq 30 \text{ m/s}$ .

(1,0)