ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

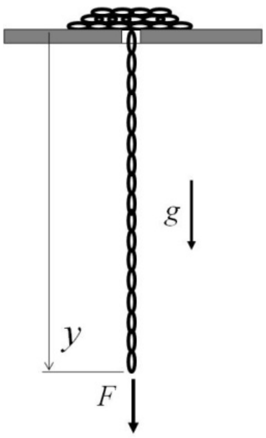
Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 1 (1.0 ponto) - baseada na palestra do dia 18 de junho/2015

(a) Cite nomes de dois proeminentes cientistas *do século XIX* envolvidos no tema de que tratou a palestra e descreva suas principais contribuições.
(b) Escreva a forma mais geral da segunda lei de Newton para uma partícula de massa variável *m*(*t*) e velocidade $\vec{v}(t)$, sujeita à ação de uma força externa $\vec{F}(t)$ e que perde massa para o meio que a circunda a uma taxa conhecida, $dm/dt < 0$, de tal sorte que a massa perdida adquire, instantaneamente, velocidade $\vec{w}(t)$, suposta conhecida e medida relativamente ao mesmo referencial inercial. Como é denominada esta forma de representação da lei de Newton na literatura científica?

Respostas:

(a) Dois proeminentes cientistas do século XIX envolvidos no tema *A Mecânica dos Sistemas de Massa Variável* a serem citados são, *Arthur Cayley* (1821-1895) e *Ivan Vsevolodovich Meshchersky* (1859-1935).



Arthur Cayley, matemático inglês, dedicou-se ao estudo do problema idealizado da corrente que cai de (ou sobre) uma mesa. Este problema havia sido tratado de forma pioneira pelo cientista *von Buquoy* (Georg Franz August de Longueval, Baron von Vaux, Graf von Buquoy, 1781-1851), em 1812 e apresentado na Academia de Ciências de Paris, em 1815, de onde recebeu algum reconhecimento de Siméon Denis Poisson, quem veio a tratar do tema da dinâmica de corpos de massa variável em 1819, através de uma publicação específica no *Bull. Sci. Soc. Philomat. Paris.*

Cayley desenvolveu formulação Lagrangeana apropriada ao problema, de tal sorte a tratar coerentemente a dinâmica da parte suspensa da corrente, cuja massa depende de seu comprimento, ou seja da coordenada generalizada que define a posição de sua extremidade. O estudo foi publicado em 1857 no Proc. Royal Society of London. Esta formulação específica foi, diversas vezes, ora contestada ora reconhecida, por mecanicistas ao longo do século XX, até ser demonstrada, em âmbito geral, por Cveticanin (1993) e Pesce (2003).

Ivan Vsevolodovich Meshchersky, mecanicista russo, de St Petesburgo, é considerado pela literatura técnica do leste europeu como o cientista que deu fundamentos à interpretação da segunda Lei de Newton quando aplicada a partículas que perdem (ou ganham) massa para o (do) meio que a circunda. Tal interpretação recebe o nome de Equação de Meshchersky e considera, de forma própria, a ação adicional da força decorrente do produto da taxa temporal da variação de massa com a velocidade relativa entre a partícula em estudo e a massa perdida (ganha). Sua publicação seminal, dissertação de mestrado, foi apresentada em 1897. Publicou um livro texto em 1914, referência fundamental à escola russa de Mecânica, cuja tradução para o inglês veio a ocorrer quase 50 anos depois, em 1960, por ocasião do debate entre acadêmicos norte-americanos acerca da interpretação que era dada à aplicação da segunda lei de Newton para sistemas de massa variável, debate este estimulado pela corrida espacial.

O caso em que a matéria ganha/perdida tem/adquire velocidade nula em relação ao mesmo referencial inercial em relação ao qual se estuda o movimento da partícula é especial - e hoje é conhecido como o caso de *Levi-Civita* (1873-1941), importante matemático e mecanicista italiano do final do século XIX e início do século XX.

(0,5 ponto)

(b) $$\vec{F}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{w}) \qquad (1)$$

ou, equivalentemente,

$$\vec{F}(t) + \frac{dm}{dt}\vec{w} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \qquad (2)$$

ou ainda,

$$\vec{F}(t) + \vec{\Phi} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt};\ \text{com}\ \ \vec{\Phi} = \frac{dm}{dt}(\vec{w} - \vec{v}) \qquad (3)$$

é a forma mais geral da segunda lei de Newton para uma partícula de massa variável $m(t)$ e velocidade $\vec{v}(t)$, sujeita à ação de uma força externa $\vec{F}(t)$ e que perde/ganha massa para o meio que a circunda a uma taxa conhecida, *dm/dt*, de tal sorte que a massa ganha/perdida tem/adquire, instantaneamente, velocidade $\vec{w}(t)$, suposta conhecida e medida relativamente ao mesmo referencial inercial. Esta forma de interpretação é conhecida na literatura científica como *Equação de Meshchersky* e o termo $\vec{\Phi}$, proporcional ao produto da taxa temporal de variação de massa com a velocidade relativa, é denominado *força de Meshchersky*, em homenagem ao famoso mecanicista russo. Se $dm/dt<0$, ou seja, no caso de perda de massa, o termo $\vec{\Phi}$ pode ser interpretado como uma força de empuxo.

(0,5 ponto)

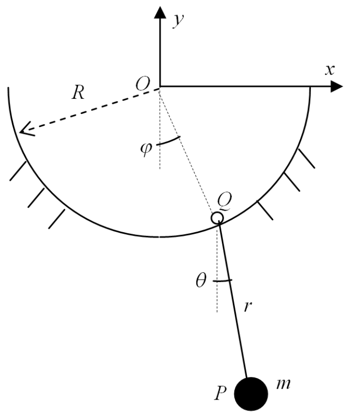
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,5 pontos)

Um rolete *Q* de massa desprezível desliza sobre uma pista cilíndrica ideal de raio *R*, mantendo-se no plano *Oxy*, conforme indicado na figura. Ligada a *Q* há uma haste de massa desprezível e comprimento *r* à qual, na extremidade *P*, prende-se uma partícula de massa *m*. Considerando o sistema de referência *Oxyz*, e tomando as coordenadas generalizadas φ e θ, pede-se:



(a) descrever a posição de *P* em função das coordenadas generalizadas e dos parâmetros do problema;
(b) escrever a expressão da energia potencial do sistema;
(c) escrever a expressão da energia cinética do sistema;
(d) Supondo que o sistema realize pequenas oscilações em torno da configuração de equilíbrio, obter as equações do movimento na forma linearizada.

(a)

$$(P-O) = (P-Q) + (Q-O)$$
$$(Q-O) = R(sen\phi\vec{i} - cos\phi\vec{j})$$
$$(P-Q) = r(sen\theta\vec{i} - cos\theta\vec{j})$$
$$(P-O) = (Rsen\phi + rsen\theta)\vec{i} - (Rcos\phi + rcos\theta)\vec{j}$$

Portanto, as equações de transformação ficam:

$$x = Rsen\phi + rsen\theta$$
$$y = -Rcos\phi - rcos\theta$$

(0,5 ponto)

(b)

A energia potencial é:

$$V = -mg(Rcos\phi + rcos\theta)$$

(0,5 ponto)

(c)

Partindo de

$$x = Rsen\phi + rsen\theta \Longrightarrow \dot{x} = \dot{\phi}Rcos\phi + \dot{\theta}rcos\theta y = Rcos\phi - rcos\theta \Longrightarrow \dot{y} = \dot{\phi}Rsen\phi + \dot{\theta}rsen\theta$$

chega-se à expressão da energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{\phi}Rcos\phi + \dot{\theta}rcos\theta)^2 + (\dot{\phi}Rsen\phi + \dot{\theta}rsen\theta)^2\right]$$
$$T = \frac{1}{2}m\left[R^2\dot{\phi}^2 + 2Rrcos(\phi-\theta)\dot{\phi}\dot{\theta} + r^2\dot{\phi}^2\right]$$

(1, 0 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

(d)

O sistema será linearizado em torno da condição de equilíbrio, na qual $\phi = 0$ e $\theta = 0$. As formas quadráticas da energia cinética e da energia potencial são

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{jr}\dot{q}_j\dot{q}_r; \quad V_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b_{jr}\dot{q}_j\dot{q}_r$$, com

$$a_{jr} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}|_{q^0}\frac{\partial x_i}{\partial q_r}|_{q^0}\right) \quad \text{e} \quad b_{jr} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_r}|_{q^0}\right)$$

Como o problema é plano, a somatória da forma quadrática da energia cinética tem como limite $2N$ e, no caso do em questão, $N = 1$ (número de corpos do sistema), ao passo que o número de graus de liberdade é n=2. Com isso em vista, o primeiro passo consiste em escrever as equações de transformação:

$$a_{11} = m\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial x}{\partial \phi}|_{(0;0)}\right) + m\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \phi}|_{(0;0)}\right) = mR^2cos^2(0) + mR^2sen^2(0) = mR^2$$
$$a_{12} = a_{21} = m\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial x}{\partial \theta}|_{(0;0)}\right) + m\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial \theta}|_{(0;0)}\right) = m(Rcos(0).rcos(0)) + m(-Rsen(0) - rsen(0)) = mRr$$
$$a_{22} = m\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta}|_{(0;0)}\right) + m\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta}|_{(0;0)}\right) = mr^2cos^2(0) + mr^2sen^2(0) = mr^2$$

$$b_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}|_{(0;0)} = mgR$$
$$b_{12} = b_{21} = \frac{\partial V}{\partial \phi}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)|_{(0;0} = 0$$
$$b_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}|_{(0;0)} = mgr$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} mR^2 & mRr \\ mRr & mr^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgR & 0 \\ 0 & mgr \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1,5 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos) - baseada no EMSC#2/2015

Sabendo-se que a função da energia potencial é dada pela expressão abaixo,

$$V = \tfrac{1}{2} K \delta_A^{\,2} + \tfrac{1}{2} K \delta_B^{\,2} = \tfrac{1}{2} K \left\{ \left[\left(x^2 + (y-a)^2 \right)^{1/2} - L \right]^2 + \left[\left(x^2 + (y+a)^2 \right)^{1/2} - L \right]^2 \right\}$$

ou ainda,

$$V = \tfrac{1}{2} K \delta_A^{\,2} + \tfrac{1}{2} K \delta_B^{\,2} = \tfrac{1}{2} K a^2 \left\{ \left[\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} - 1\right)^2 \right)^{1/2} - \frac{L}{a} \right]^2 + \left[\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} + 1\right)^2 \right)^{1/2} - \frac{L}{a} \right]^2 \right\}$$

pede-se:

(a) verificar que a origem *O* é um ponto de equilíbrio;
(b) explicar como varia o número de pontos de equilíbrio estáveis do sistema em função do quociente ***L/a;***
(c) fazer um esboço da projeção do espaço de fase em *x*, isto é, (*x*, *dx/dt*), correspondente à simulação da Figura 1;
(d) fazer um esboço da resposta temporal da coordenada *x* correspondente à simulação da Figura 2;
(e) quantos pontos de equilíbrio você identifica na Figura 2? Indique-os e qualifique-os quanto à sua estabilidade.

Observação: todos os esboços devem conter elementos que permitam caracterizá-los como respostas efetivas às solicitações. Exemplos desses elementos são escalas nos eixos coordenados (relativas ou numéricas, quando pertinente) e identificação, nos gráficos, de ponto (ou pontos) relevante(s) para a resposta fornecida.

Solução:

(a) Para a verificação de que (0;0) é um ponto de equilíbrio é necessário calcular as derivadas parciais da função potencial, no ponto solicitado, e constatar que o resultado é nulo:

$$\frac{\partial V}{\partial x}|_{(0;0)} = Kx\left[((x^2+(y-a)^2)^{1/2} - L)(x^2+(y-a)^2)^{-1/2} + ((x^2+(y+a)^2)^{1/2} - L)(x^2+(y+a)^2)^{-1/2}\right]|_{(0;0)} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}|_{(0;0)} = K\left[((x^2+(y-a)^2)^{1/2} - L)(x^2+(y-a)^2)^{-1/2}(y-a) + ((x^2+(y+a)^2)^{1/2} - L)(x^2+(y+a)^2)^{-1/2}(y+a)\right]|_{(0;0)} = -(a-L)+(a-L) = 0$$

(1,0)

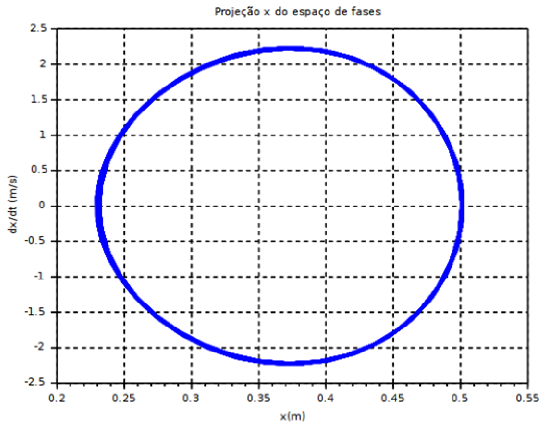
b) Para **L/a<1** há um ponto de equilíbrio estável, a saber, (0;0); para ***L/a>1*** há dois pontos de equilíbrio, estáveis e simétricos, com relação ao eixo das ordenadas; para ***L/a=0*** há um ponto de equilíbrio instável, (0;0), denominado "centro limítrofe", ponto este que dá origem a uma bifurcação do equilíbrio. **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

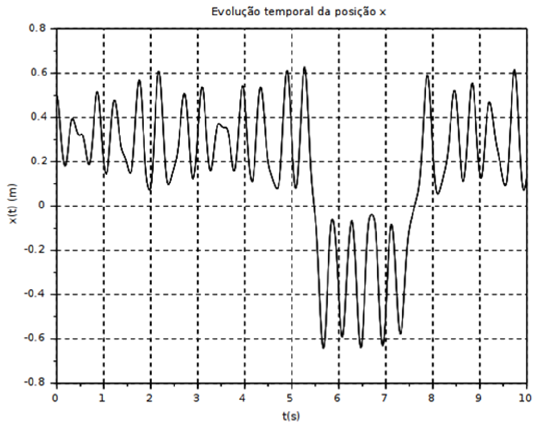
Departamento de Engenharia Mecânica

(c)



(0,5)

(d)



(0,5)

(e) Na Figura 2 são identificáveis 3 pontos de equilíbrio **(0,5)**

São eles: (0;0) – instável
(0; -0,37) – estável
(0;+0,37) – estável **(0,5)**

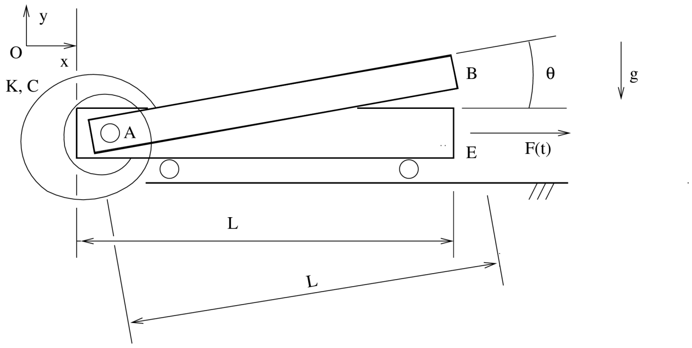
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 4 (3,0 pontos)

Considere um sistema formado por duas barras. A primeira, AB, está articulada, no ponto A, à outra, AE. Ambas têm massa *m* e comprimento *L*. A barra AE pode deslizar horizontalmente, sem atrito. A barra AB pode girar em torno do ponto A, mantendo-se no plano *Oxy*. Na articulação A há uma mola rotacional linear de constante de rigidez *K*. A articulação A é lubrificada e o efeito da lubrificação pode ser representado por um amortecedor rotacional linear de constante de amortecimento *C*. A mola está no seu ângulo natural quando o ângulo θ é nulo, ou seja, quando as barras estão alinhadas. Tomando as variáveis x e θ como coordenadas generalizadas e considerando a ação de uma força $F(t)$, de direção horizontal e aplicada ao ponto E, pede-se:



(a) a expressão da energia cinética do sistema;
(b) a expressão da energia potencial do sistema;
(c) a expressão da função de dissipação de Rayleigh, *R*, representativa do amortecedor rotacional de constante *C*;
(d) a expressão do trabalho virtual da força (não conservativa) $F(t)$;
(e) as equações de movimento do sistema.

a)

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{AE} + T^{AB} = \tfrac{1}{2}m\dot{(x)} + \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2$$

$$\vec{v_g} = \left(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\vec{i} + \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{j}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{(x)} + \frac{1}{2}m(\dot{x} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}m(\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

(1,0 ponto)

b)

$$V = \frac{1}{2}K\theta^2 + mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

(0,5 ponto)

c)

$$R = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$$

(0,25 pontos)

d)

$\delta W_F = F(t)\delta x$

(0,25 pontos)

e)

Eq. em x
$$2m\ddot{x} - m\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta = F(t)$$

Eq. em θ

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} - m\frac{L}{2}\ddot{x}\sin\theta + C\dot{\theta} + K\theta + mg\frac{L}{2}\cos\theta = 0$$

(1,0 ponto)