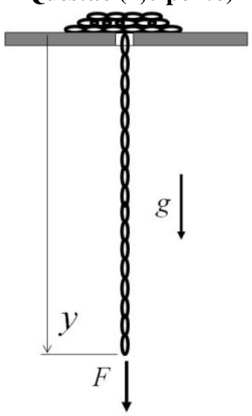
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Mecânica B – PME 2200 –3ª Prova – 24/06/2014
Duração da Prova: 100 minutos
(Nã é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)

1ª Questão (1,0 ponto) - Refere-se à palestra de 10/06/2014.



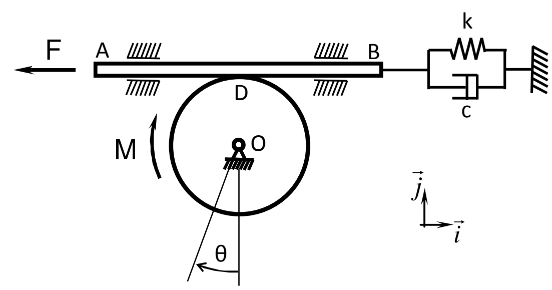
Considere o problema idealizado de Cayley, ilustrado ao lado. A corrente de densidade de massa linear μ é puxada pela força F, sob ação da gravidade, a partir da mesa onde se apoia. Pede-se:

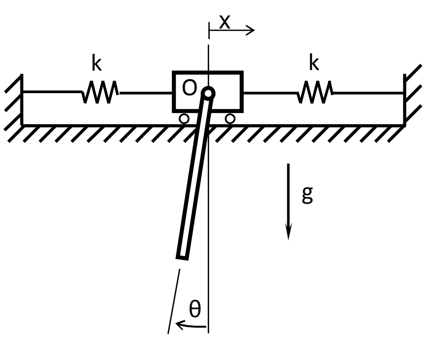
(a) Escreva a função Lagrangeana do problema, considerando a parte suspensa da corrente, de massa $m_S(y) = \mu y$, escrita como função linear da coordenada generalizada y.

(b) Deduza a equação de movimento *fazendo uso da Equação estendida de Lagrange*, própria para sistemas de massa explicitamente variável com a posição, que no presente contexto toma a forma: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial m_S}{\partial y}\dot{y}^2 + F$

(c) Compare a equação acima deduzida com aquela que seria obtida com o emprego da Equação usual de Lagrange, válida para sistemas de massa invariante. Discuta o resultado.

2ª Questão (3,0 pontos) - No sistema mostrado na figura, a barra AB tem massa m e uma de suas extremidades está acoplada a um conjunto composto por mola de rigidez k e amortecedor viscoso linear de constante c. O disco de centro O tem massa m e raio R e rola sem escorregar em relação à barra AB. O movimento da barra está restrito à direção AB e a mola tem deformação nula quando a coordenada θ vale zero. A força $\vec{F} = -F\,\vec{i}$ está aplicada na extremidade A da barra AB e o momento $\vec{M} = -M\,\vec{k}$ está aplicado sobre o disco. Usando θ como coordenada generalizada, determine a equação de movimento usando o método de Lagrange.

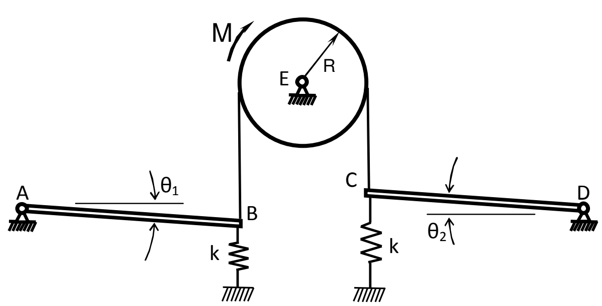




3ª Questão (4,0 pontos) - No sistema mostrado na figura, o bloco de massa m está acoplado a duas molas de rigidez k. O centro O do bloco está articulado a uma barra de massa m e comprimento l. As molas têm deformação nula quando a coordenada x do ponto O vale zero. Usando x e θ como coordenadas generalizadas:

(a) Determine as equações de movimento usando o método de Lagrange.
(b) Linearize as equações de movimento em torno das coordenadas de equilíbrio $x = 0$ e $\theta = 0$.

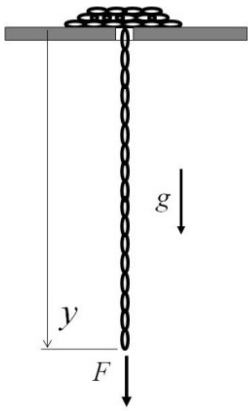
4ª Questão (3,0 pontos) - A barra AB, de massa $2m$ e comprimento L, está articulada em A e apoiada em B sobre uma mola de rigidez k e cujo comprimento natural é consistente com θ_1=0. A barra CD, de massa m e comprimento L, está articulada am D e apoiada em C sobre uma mola de rigidez k e cujo comprimento natural é consistente com θ_2=0. Um fio inextensível interliga os pontos B e C, passando por uma polia de centro E e raio R. Um momento M pode ser aplicado à polia, $\vec{M} = -M\,\vec{k}$. Admite-se que o fio está sempre esticado e que não há escorregamento entre o fio e a polia. Pede-se:



a) Determine a configuração de equilíbrio, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e momento M=0.

b) Determine o valor do momento M tal que o ângulo de equilíbrio seja nulo.

1ª Questão (1,0 ponto) - Refere-se à palestra de 10/06/2014.



Considere o problema idealizado de Cayley, ilustrado ao lado. A corrente de densidade de massa linear μ é puxada pela força *F*, sob ação da gravidade, a partir da mesa onde se apoia. Pede-se:

(a) Escreva a função Lagrangeana do problema, considerando a parte suspensa da corrente, de massa $m_S(y) = \mu y$, escrita como função linear da coordenada generalizada *y*.

(b) Deduza a equação de movimento *fazendo uso da Equação estendida de Lagrange*, própria para sistemas de massa explicitamente variável com a posição, que no presente contexto toma a forma: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial m_S}{\partial y}\dot{y}^2 + F$

(c) Compare a equação acima deduzida com aquela que seria obtida com o emprego da Equação usual de Lagrange, válida para sistemas de massa invariante. Discuta o resultado.

Resolução:

(a) A função Lagrangiana no presente caso, de um sistema holônomo com um único grau de liberdade, representado pela coordenada generalizada *y*, é, por definição, dada por: $L(y,\dot{y},t) = T(y,\dot{y},t) - V(y,\dot{y},t)$, com *T* e *V* as funções de energia cinética e potencial (gravitacional). Tais funções são dadas, respectivamente, por:

$$T(y,\dot{y}) = \frac{1}{2}m_s\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu y\dot{y}^2 \qquad (1)\ (0{,}2)$$

e

$$V(y,\dot{y}) = -\int_0^y g\mu\xi d\xi = -\frac{1}{2}\mu g y^2\ . \qquad (2)\ (0{,}2)$$

Assim:

$$L(y,\dot{y}) = \frac{1}{2}\mu y\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mu g y^2\ . \qquad (3)\ (0{,}1)$$

(b) Os termos da equação de Lagrange estendida, própria para o presente sistema de massa que varia explicitamente com a posição, a qual é ganha pela parte suspensa a partir da parte em repouso, são então:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \mu y\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \mu(\dot{y}^2 + y\ddot{y})$$

$$-\frac{\partial L}{\partial y} = -\mu(\frac{1}{2}\dot{y}^2 + gy) \qquad (4)\ (0{,}2)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial m_S}{\partial y}\dot{y}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mu y}{\partial y}\dot{y}^2 = -\frac{1}{2}\mu\dot{y}^2$$

Notando que o terceiro termo cancela identicamente a primeira parcela do segundo termo, a equação de Lagrange estendida, conduz à equação de movimento:

$$y\ddot{y} + \dot{y}^2 - gy = \frac{F}{\mu}\ , \qquad (5)$$

ou

$$\ddot{y} = g - \frac{\dot{y}^2}{y} + \frac{F}{\mu y};\ \ y > 0\ \cdot \qquad (6)\ (0{,}2)$$

Nota: esta segunda forma de representação da equação de movimento, Eq. (6), deve estar restrita ao domínio *y*>0, caso contrário apresentaria uma aparente singularidade matemática em *y=0*, a qual deveria ser interpretada, coerentemente à Eq. (5), da seguinte forma: 'no caso *F*=0, não haverá movimento se no instante inicial não houver qualquer parte suspensa'.

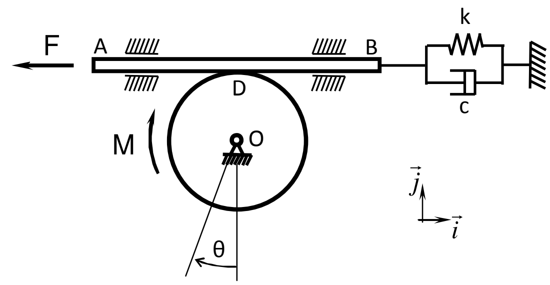
(c) Se a forma usual da Equação de Lagrange, válida para sistemas de massa invariante, tivesse sido utilizada, ou seja, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = F$, não haveria o cancelamento do segundo termo, o que conduziria à errônea equação de movimento:

$$\ddot{y} = g - \frac{1}{2}\frac{\dot{y}^2}{y} + \frac{F}{\mu y};\ \ y > 0\ \cdot \qquad (7)\ (0{,}1)$$

Esta forma errônea difere da forma própria, Eq. (6), no segundo termo, à direita, indicando que a aceleração da parte suspensa *seria* menor, a cada instante (posto que *y>0*, sempre).

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

2ª Questão (3,0 pontos) - No sistema mostrado na figura, a barra AB tem massa m e uma de suas extremidades está acoplada a um conjunto composto por mola de rigidez k e amortecedor viscoso linear de constante c. O disco de centro O tem massa m e raio R e rola sem escorregar em relação à barra AB. O movimento da barra está restrito à direção AB e a mola tem deformação nula quando a coordenada θ vale zero. A força $\vec{F} = -F\,\vec{i}$ está aplicada na extremidade A da barra AB e o momento $\vec{M} = -M\,\vec{k}$ está aplicado sobre o disco. Usando θ como coordenada generalizada, determine a equação de movimento usando o método de Lagrange.



Resolução:

Como o contato no ponto D é de rolamento sem escorregamento, tem-se $x_D = R\theta$. Portanto, $\dot{x}_D = R\dot{\theta}$

Energia cinética: $E = E_{Disco} + E_{Barra}$

$$E_{Disco} = \frac{1}{2} m \vec{V}_O . \vec{V}_O + m\vec{V}_O . \left[\vec{\dot{\theta}} \wedge (G - O)\right] + \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^t [I_O]\{\dot{\theta}\}, \text{ em que } \vec{V}_O = \vec{0} \text{ e G = O}$$

$$\Rightarrow E_{Disco} = \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2, \text{ com } J_O = \frac{1}{2} mR^2 \quad \Rightarrow E_{Disco} = \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2$$

$$E_{Barra} = \frac{1}{2} m\,\dot{x}_D^2 \quad \Rightarrow E_{Barra} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{3mR^2}{4}\dot{\theta}^2} \quad (1{,}0)$$

Energia potencial: $V = V_{Elástica} = \frac{1}{2} k\, x_D^2 \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2} kR^2\theta^2}$ (0,5)

Função Lagrangeana: $L = E - V = \frac{3mR^2}{4}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kR^2\theta^2$

Função dissipativa de Rayleigh: $R_a = \frac{1}{2} c(\dot{x}_D)^2 \Rightarrow \boxed{R_a = \frac{1}{2} cR^2\dot{\theta}^2}$ (0,5)

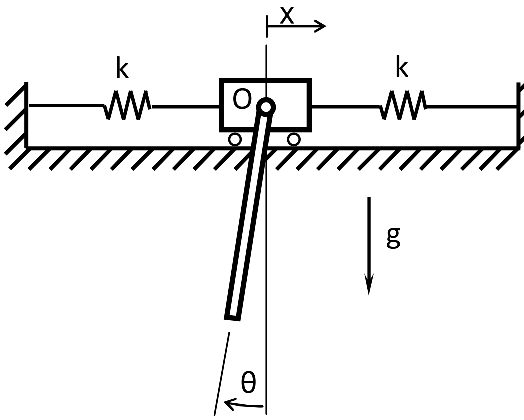
Forças generalizadas: $\delta W = -F\delta x_D + M\delta\theta$

$$\Rightarrow Q_\theta = -F\frac{\partial x_D}{\partial \theta} + M\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = M - FR \quad (0{,}5)$$

Equação de Lagrange, coordenada θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3mR^2}{2}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta} \;;\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta \;;\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = cR^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3mR^2}{2}\ddot{\theta} + kR^2\theta + cR^2\dot{\theta} = M - FR} \quad (0{,}5)$$



3ª Questão (4,0 pontos) - No sistema mostrado na figura, o bloco de massa *m* está acoplado a duas molas de rigidez *k*. O centro *O* do bloco está articulado a uma barra de massa *m* e comprimento *l*. As molas têm deformação nula quando a coordenada *x* do ponto *O* vale zero. Usando x e θ como coordenadas generalizadas:

(a) Determine as equações de movimento usando o método de Lagrange.
(b) Linearize as equações de movimento em torno das coordenadas de equilíbrio $x = 0$ e $\theta = 0$.

(a) Energia cinética: $E = E_{Barra} + E_{Bloco}$

$$E_{Bloco} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad (0{,}5)$$

$$E_{Barra} = \frac{1}{2} m\vec{V}_O.\vec{V}_O + m\vec{V}_O.\left[\dot{\vec{\theta}} \wedge (G-O)\right] + \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^t[I_O]\{\dot{\theta}\}, \text{ em que } \vec{V}_O = \dot{x}\vec{i}$$

$$\Rightarrow E_{Barra} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + m\dot{x}\vec{i}.\left[(-\dot{\theta})\vec{k} \wedge \left(-\frac{l}{2} sen\theta\,\vec{i} - \frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{j}\right)\right] + \frac{1}{2} J_O\dot{\theta}^2, \text{ com } J_O = \frac{1}{3} ml^2$$

$$\Rightarrow E_{Barra} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2 \quad (0{,}5)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2}$$

Energia potencial: $V = V_{Grav} + V_{Elástica} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{V = kx^2 - mg\frac{l}{2}\cos\theta}$ (0,5)

Função Lagrangeana: $L = E - V = m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2 - kx^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta$

Função dissipativa de Rayleigh: $R = 0$; forças generalizadas $Q_x = 0$ e $Q_\theta = 0$

Equações de Lagrange:

Coordenada x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} - m\dot{\theta}\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x} - m\frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + m\dot{\theta}^2\frac{l}{2}sen\theta \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -2kx$$

$$\Rightarrow \boxed{2m\ddot{x} - m\frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta} + m\dot{\theta}^2\frac{l}{2}sen\theta + 2kx = 0} \quad (0{,}5)$$

Coordenada θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -m\dot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -m\ddot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + m\dot{x}\frac{l}{2}sen\theta\dot{\theta} + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} \quad ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{x}\frac{l}{2}sen\theta\dot{\theta} - mg\frac{l}{2}sen\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{-m\ddot{x}\frac{l}{2}\cos\theta + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}sen\theta = 0}$$ (0,5)

(b) Linearização

$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{2} b_{ik}q_k = Q_i$, para i =1,2, em que i = 1 refere-se à coordenada x e i = 2 refere-se à coordenada θ

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 2m \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = -\dfrac{ml}{2}\cos\theta \\ \alpha_{22} = \dfrac{ml^2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 2m \\ a_{12} = a_{21} = -\dfrac{ml}{2} \\ a_{22} = \dfrac{ml^2}{3} \end{cases}$$ (0,5)

$$\begin{cases} b_{11} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=0}} = 2k \\ b_{12} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=0}} = 0 \;\; e \;\; b_{21} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=0}} = 0 \\ b_{22} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\substack{x=0\\ \theta=0}} = \dfrac{mgl}{2} \end{cases}$$ (0,5)

Coordenada x:

$$a_{11}\ddot{x} + a_{12}\ddot{\theta} + b_{11}x + b_{12}\theta = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{2m\ddot{x} - m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2kx = 0}$$

Coordenada θ:

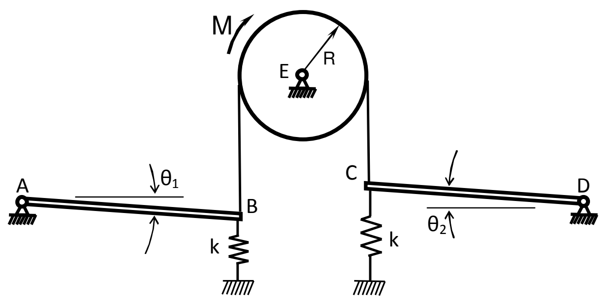
$$a_{21}\ddot{x} + a_{22}\ddot{\theta} + b_{21}x + b_{22}\theta = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{-m\frac{l}{2}\ddot{x} + m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta = 0}$$

Na forma matricial: $$\boxed{\begin{bmatrix} 2m & -m\dfrac{l}{2} \\ -m\dfrac{l}{2} & m\dfrac{l^2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & m\dfrac{gl}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

4ª Questão (3,0 pontos) - A barra *AB*, de massa 2*m* e comprimento *L*, está articulada em *A* e apoiada em *B* sobre uma mola de rigidez *k* e cujo comprimento natural é consistente com $\theta_1=0$. A barra *CD*, de massa *m* e comprimento *L*, está articulada am *D* e apoiada em *C* sobre uma mola de rigidez *k* e cujo comprimento natural é consistente com $\theta_2=0$. Um fio inextensível interliga os pontos *B* e *C*, passando por uma polia de centro *E* e raio *R*. Um momento *M* pode ser aplicado à polia, $\vec{M} = -M\,\vec{k}$. Admite-se que o fio está sempre esticado e que não há escorregamento entre o fio e a polia. Pede-se:



a) Determine a configuração de equilíbrio, utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais e momento M=0.

b) Determine o valor do momento M tal que o ângulo de equilíbrio seja nulo.

Resolução: Considerando que θ_1 e θ_2 são pequenos

a) Relação de compatibilidade: $\theta_1 = \theta_2 \;\Rightarrow\; \delta\theta_1 = \delta\theta_2$

$$\delta W = 2mg\frac{L}{2}\delta\theta_1 - mg\frac{L}{2}\delta\theta_2 - kL^2\theta_1\delta\theta_1 - kL^2\theta_2\delta\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow\left(2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} - kL^2\theta_1 - kL^2\theta_2\right)\delta\theta_1 = 0$$, em que $\delta\theta_1$ é arbitrário

$$\Rightarrow mg\frac{L}{2} - 2kL^2\theta_1 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{\theta_{1_{eq}} = \frac{mg}{4kL} = \theta_{2_{eq}}} \quad (1,5)$$

b) Define-se um deslocamento virtual $\delta\theta_3$ para o disco. Relação de compatibilidade: $L\theta_1 = R\theta_3 \;\Rightarrow\; \delta\theta_3 = \frac{L}{R}\delta\theta_1$

$$\delta W = 2mg\frac{L}{2}\delta\theta_1 - mg\frac{L}{2}\delta\theta_2 - M\delta\theta_3 - kL^2\theta_1\delta\theta_1 - kL^2\theta_2\delta\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow\left(2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} - M\frac{L}{R} - kL^2\theta_1 - kL^2\theta_2\right)\delta\theta_1 = 0$$, em que $\delta\theta_1$ é arbitrário

$\Rightarrow mg\frac{L}{2} - M\frac{L}{R} - 2kL^2\theta_1 = 0$. Portanto, para θ_1 igual a zero: $\Rightarrow \boxed{M = \frac{mgR}{2}}$ (1,5)

<u>Solução alternativa</u> considerando que os ângulos θ_1 e θ_2 não são necessariamente pequenos

a) Relação de compatibilidade: $\theta_1 = \theta_2 \;\Rightarrow\; \delta\theta_1 = \delta\theta_2$

$$\delta W = 2mg\frac{L}{2}\cos\theta_1\delta\theta_1 - mg\frac{L}{2}\cos\theta_2\delta\theta_2 - kL\,sen\,\theta_1 L\cos\theta_1\delta\theta_1 - kL\,sen\,\theta_2 L\cos\theta_2\delta\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow\left(2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} - kL^2 sen\,\theta_1 - kL^2 sen\,\theta_2\right)\delta\theta_1 = 0$$, em que $\delta\theta_1$ é arbitrário

$$\Rightarrow mg\frac{L}{2} - 2kL^2 sen\,\theta_1 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{sen\,\theta_{1_{eq}} = \frac{mg}{4kL} = sen\,\theta_{2_{eq}}} \quad (1,5)$$

b) Define-se um deslocamento virtual $\delta\theta_3$ para o disco. Relação de compatibilidade: $L\theta_1 = R\theta_3 \;\Rightarrow\; \delta\theta_3 = \frac{L}{R}\delta\theta_1$

$$\delta W = 2mg\frac{L}{2}\cos\theta_1\delta\theta_1 - mg\frac{L}{2}\cos\theta_2\delta\theta_2 - kL\,sen\,\theta_1 L\cos\theta_1\delta\theta_1 - kL\,sen\,\theta_2 L\cos\theta_2\delta\theta_2 - M\delta\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow\left(2mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2} - M\frac{L}{R} - kL^2 sen\,\theta_1 - kL^2 sen\,\theta_2\right)\delta\theta_1 = 0$$, em que $\delta\theta_1$ é arbitrário

$\Rightarrow mg\frac{L}{2} - M\frac{L}{R} - 2kL^2 sen\,\theta_1 = 0$. Portanto, para θ_1 igual a zero: $\Rightarrow \boxed{M = \frac{mgR}{2}}$ (1,5)