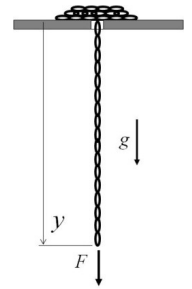




**PME 2200 – MECÂNICA B – 3ª Prova – 18 de junho de 2013**  
**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

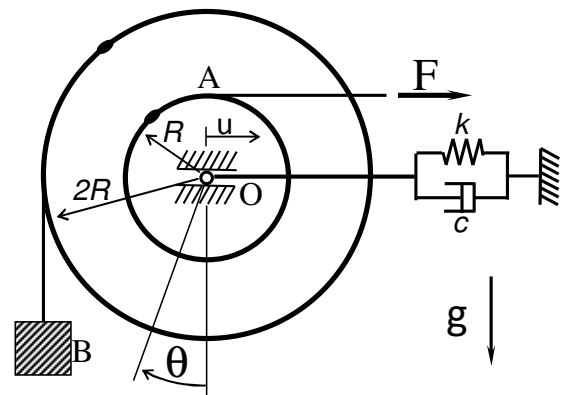
**1ª Questão** (1,0 ponto) - Refere-se à palestra de 11/06/2013.

Identifique o problema ilustrado ao lado. Descreva-o e discorra sobre sua importância histórica e conceitual.



**2ª Questão** (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura, o carretel possui massa  $M$  e raio externo  $2R$ . O centro  $O$  do carretel pode movimentar-se apenas na direção  $u$  e está acoplado a uma mola de rigidez  $k$  e a um amortecedor viscoso linear de constante  $c$ . O diâmetro externo do carretel está preso a um bloco de massa  $M$  por meio de um fio ideal. A mola tem deformação nula quando as coordenadas  $u$  e  $\theta$  valem zero. Uma força horizontal  $F(t) > 0$ , conhecida, atua em um fio ideal preso em um raio  $R$  do carretel. Considere que o momento de inércia do carretel em relação ao eixo ortogonal à figura, passando por  $O$ , é  $J_O$ . Usando  $u$  e  $\theta$  como coordenadas generalizadas, pedem-se:

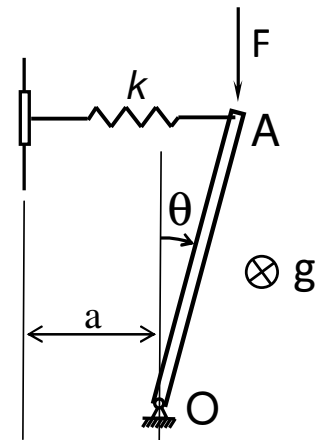


- A energia cinética do sistema.
- A energia potencial do sistema.
- A função dissipativa de Rayleigh do sistema
- As equações de movimento para as coordenadas  $u$  e  $\theta$ , a partir do método de Lagrange.

**3ª Questão** (3,0 pontos)

A barra  $OA$  mostrada na figura tem comprimento  $L$ , massa  $m$  e movimenta-se no plano horizontal. A mola de rigidez  $k$  está fixa à extremidade  $A$  da barra  $OA$  e a uma guia vertical, de forma que a mola permanece sempre perpendicular à guia. O comprimento natural da mola é  $a$ . Uma força  $F$ , constante e com o sentido indicado, é aplicada ao ponto  $A$ . Não há quaisquer efeitos de atrito no sistema.

- Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, deduza os possíveis ângulos  $\theta_{eq}$  de equilíbrio do sistema.
- Utilizando  $\theta$  como coordenada generalizada, determine a equação de movimento do sistema por meio do método de Lagrange.
- Verifique a resposta do item (a) a partir da equação de movimento do sistema.





**4ª Questão** (3,5 pontos) - Refere-se ao EMSC #3

- (a) Responda justificando: Por que neste caso é possível descrever a dinâmica do sistema através de uma única equação de movimento, a equação (1), abaixo?

$$\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta \cos(\theta))(\beta - \alpha \cos(\theta))}{I^2 \sin^3 \theta} = 0 \quad (1)$$

com  $\alpha = I\dot{\phi} \sin^2(\theta) + J \cos(\theta)(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$  (2)

e  $\beta = J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta))$  (3)

- (b) Deduza uma condição algébrica compatível com uma precessão estacionária (no presente caso, também denominada precessão livre).
- (c) Descreva como você obteve a função  $\dot{\phi}(t)$ , uma vez conhecida  $\theta(t)$ . Justifique sua resposta.
- (d) Descreva como você obteve a função  $\phi(t)$ , uma vez conhecida  $\dot{\phi}(t)$ . Apresente detalhes da lógica computacional por você utilizada.
- (e) Observe os gráficos de  $\theta(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  e  $\dot{\psi}(t)$  das figuras 1 a 3, abaixo. Determine se o corpo é achatado ou alongado e justifique sua resposta.
- (f) Descreva, do ponto de vista computacional, como você implementou o momento impulsivo que é aplicado na direção  $Oy$ . Apresente alguns detalhes de lógica computacional por você utilizada.

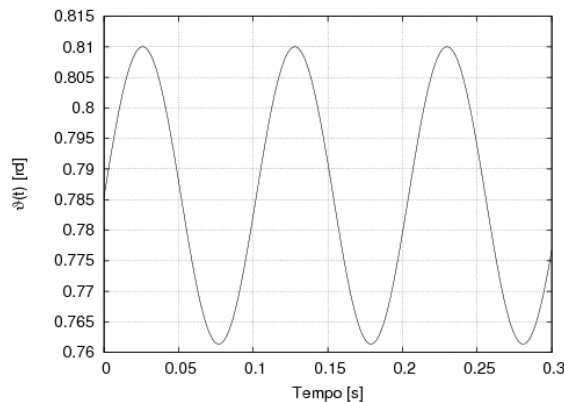


Figura 1: Ângulo de nutação em função do tempo

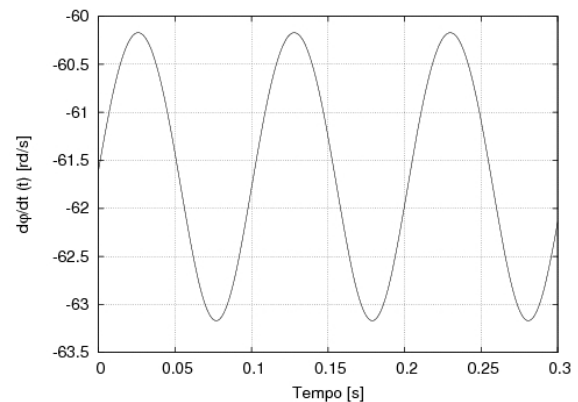


Figura 2: Velocidade de precessão em função do tempo

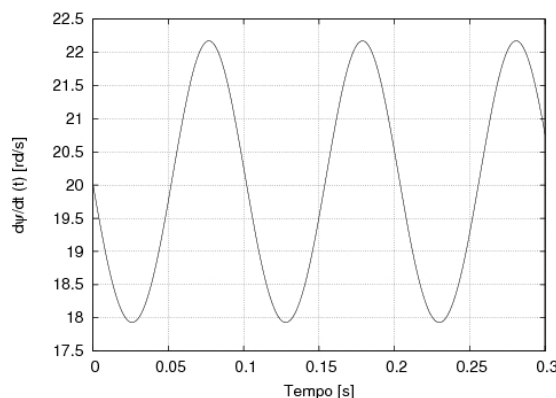
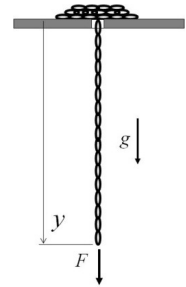


Figura 3: Velocidade de rotação própria em função do tempo



**1ª Questão** (1,0 ponto) - Refere-se à palestra de 11/06/2013.

Identifique o problema ilustrado ao lado. Descreva-o e discorra sobre sua importância histórica e conceitual.

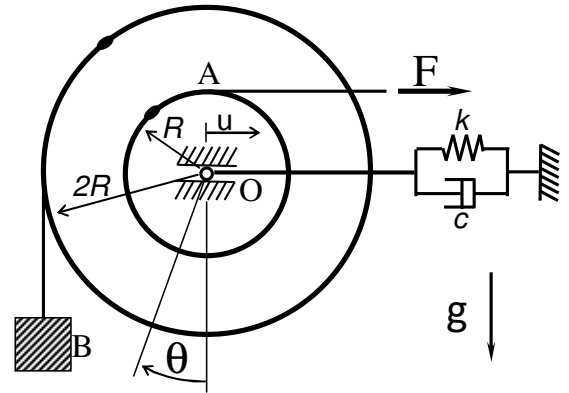
**Resolução:**

O problema ilustrado ao lado é o problema da “corrente que cai”, ou problema de *Cayley*, (Arthur Cayley, matemático britânico do século XIX), que o propôs e formulou através da Mecânica Analítica, em publicação de 1857. É um dos problemas clássicos que pode ser tratado à luz da dinâmica de sistemas de massa variável, se for observado que a parte suspensa da corrente tem sua massa gradativamente aumentada à medida que o movimento se estabelece. Cayley propôs tal problema de forma idealizada, estabelecendo hipóteses que o simplificam sobremaneira. As principais hipóteses são: (i) qualquer forma de atrito é desconsiderada; (ii) os elos são considerados rígidos; (iii) o movimento da parte suspensa é modelado como de translação retilínea vertical de um corpo rígido de densidade linear homogênea; (iv) admite-se que o elo que alimenta o trecho suspenso parte do repouso e adquire, instantaneamente, a velocidade daquele trecho em movimento, em uma realização idealizada de “impacto contínuo”. Esta é uma das versões abordadas no século XIX, a partir dos estudos pioneiros do cientista tcheco Von Buquoy, que em 1812 propôs e elaborou a formulação de problema similar, no qual a corrente é suspensa a partir de uma mesa onde está inicialmente empilhada. Tais problemas são conceitualmente muito interessantes e estão relacionados a controvérsias históricas e recorrentes, que persistem até os dias de hoje. Tais controvérsias são originadas quando da aplicação da *usual Equação de Lagrange, cuja dedução não leva em consideração a possibilidade do sistema material em questão ter sua massa escrita como função explícita da posição*. Para problemas desta natureza a equação de Lagrange assume uma forma especial, com o aparecimento de termos adicionais interpretáveis como forças generalizadas não conservativas e às quais pode ser associada uma específica função de Rayleigh. Esta equação de Lagrange, denominada ‘estendida’, pode ser deduzida a partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais ao Princípio de D’Alembert, este último escrito de forma compatível à equação de Meshcherski, conforme mostrado por Pesce (2003). Ou pode ainda ser deduzida a partir de leis de conservação, como fez Cveticanin (1993). Coerentemente, a aplicação direta da equação de Meshcherski, (mecanicista russo do final do século XIX) - e que é a forma mais geral da expressão da segunda Lei de Newton para partículas materiais de massa variável, satisfazendo o Princípio de Relatividade de Galileu - gera a mesma equação de movimento que é deduzida a partir da equação de Lagrange estendida. A equação de Meshcherski é a formulação coerente para a segunda lei de Newton no contexto de sistemas de massa variável. Curiosamente neste problema, a equação de Meshcherski recai em uma forma particular, associada ao nome de Levi-Civita (matemático italiano do início do século XX), válida apenas quando a velocidade da matéria que se agrega ao sistema em estudo tem velocidade original nula com respeito ao mesmo referencial inercial em relação ao qual o movimento é medido.



**2ª Questão** (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura, o carretel possui massa  $M$  e raio externo  $2R$ . O centro  $O$  do carretel pode movimentar-se apenas na direção  $u$  e está acoplado a uma mola de rigidez  $k$  e a um amortecedor viscoso linear de constante  $c$ . O diâmetro externo do carretel está preso a um bloco de massa  $M$  por meio de um fio ideal. A mola tem deformação nula quando as coordenadas  $u$  e  $\theta$  valem zero. Uma força horizontal  $F(t) > 0$ , conhecida, atua em um fio ideal preso em um raio  $R$  do carretel. Considere que o momento de inércia do carretel em relação ao eixo ortogonal à figura, passando por  $O$ , é  $J_O$ . Usando  $u$  e  $\theta$  como coordenadas generalizadas, pedem-se:



- (e) A energia cinética do sistema.
- (f) A energia potencial do sistema.
- (g) A função dissipativa de Rayleigh do sistema
- (h) As equações de movimento para as coordenadas  $u$  e  $\theta$ , a partir do método de Lagrange.

**Resolução:**

*O enunciado tem implícita a hipótese de que o bloco possa se movimentar unicamente na vertical. Tal hipótese, estrito senso, não é verdadeira e tem o único objetivo de facilitar a formulação do problema, no que diz respeito ao trabalho algébrico envolvido. No entanto, a hipótese pode ser considerada aproximadamente correta se imaginarmos uma das seguintes situações: (i) existência de um suporte rígido que contenha uma guia vertical para o bloco, suporte este de massa desprezível, acoplado ao eixo do cilindro e com ao menos mais um apoio instalado na guia, de tal sorte que esteja livre para se movimentar unicamente na horizontal, acompanhando o movimento do eixo do carretel; (ii) a rigidez da mola seja muito alta e o comprimento inicial do trecho suspenso do fio suficientemente longo, de tal sorte que as frequências naturais do sistema linearizado, para pequenas oscilações angulares, guardem diferença de diversas ordens de magnitude; é também necessário supor que a força de tração imposta tenha oscilações de frequência muito superior àquela associada à oscilação pendular; nesta situação as equações de movimento ficam fracamente acopladas e o limite assintótico do comportamento dinâmico das equações linearizadas corresponde àquela da situação implicitamente idealizada.*

Definindo inicialmente  $y_B = 2R\theta$  e  $x_A = u + R\theta$

(a) Energia cinética:

$$E = E_{Disco} + E_{Bloco}$$

$$E_{Disco} = \frac{1}{2} M \vec{V}_O \cdot \vec{V}_O + M \vec{V}_O \cdot \left[ \vec{\theta} \wedge (G - O) \right] + \frac{1}{2} \{ \dot{\theta} \}^T [I_O] \{ \dot{\theta} \}, \text{ em que } \vec{V}_O = \dot{u} \vec{i} \text{ e } G = O$$

$$\Rightarrow E_{Disco} = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2$$

$$E_{Bloco} = \frac{1}{2} M \vec{V}_B \cdot \vec{V}_B = \frac{1}{2} M \dot{y}_B^2 = 2MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \left( \frac{1}{2} J_O + 2MR^2 \right) \dot{\theta}^2} \quad (1,0)$$



(b) Energia potencial:  $V = V_{Grav} + V_{Elástica} = Mgy_b + \frac{1}{2}ku^2 \Rightarrow V = 2MgR\theta + \frac{1}{2}ku^2$  (1,0)

Função Lagrangeana:  $L = E - V = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \left(\frac{1}{2}J_o + 2MR^2\right)\dot{\theta}^2 - 2MgR\theta - \frac{1}{2}ku^2$

(c) Função dissipativa de Rayleigh:  $R = \frac{1}{2}c(\dot{u})^2$  (0,5)

(d) Forças generalizadas:

$$\delta W = F \delta x_A$$

$$\Rightarrow Q_u = F \frac{\partial x_A}{\partial u} = F$$

$$\Rightarrow Q_\theta = F \frac{\partial x_A}{\partial \theta} = FR$$

Equações de Lagrange: (1,0)

Coordenada  $u$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = M\ddot{u} ; \quad \frac{\partial L}{\partial u} = -ku ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = c\dot{u}$$

$$\Rightarrow M\ddot{u} + ku + c\dot{u} = F$$

Coordenada  $\theta$ :

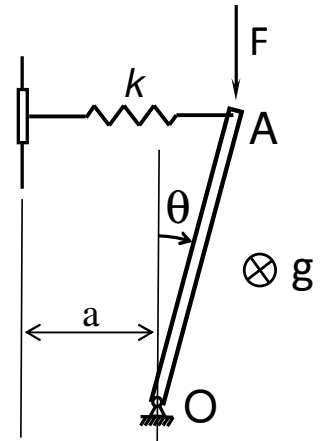
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (J_o + 4MR^2)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (J_o + 4MR^2)\ddot{\theta} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2MRg ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\Rightarrow (J_o + 4MR^2)\ddot{\theta} + 2MRg = FR$$

**3ª Questão** (3,0 pontos)

A barra  $OA$  mostrada na figura tem comprimento  $L$ , massa  $m$  e movimenta-se no plano horizontal. A mola de rigidez  $k$  está fixa à extremidade  $A$  da barra  $OA$  e a uma guia vertical, de forma que a mola permanece sempre perpendicular à guia. O comprimento natural da mola é  $a$ . Uma força  $F$ , constante e com o sentido indicado, é aplicada ao ponto  $A$ . Não há quaisquer efeitos de atrito no sistema.

- Utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, deduza os possíveis ângulos  $\theta_{eq}$  de equilíbrio do sistema.
- Utilizando  $\theta$  como coordenada generalizada, determine a equação de movimento do sistema por meio do método de Lagrange.
- Verifique a resposta do item (a) a partir da equação de movimento do sistema.

**Resolução:**

Definindo inicialmente  $y_A = L \cos \theta \Rightarrow \delta y_A = -L \sin \theta \delta \theta$  e  $x_A = L \sin \theta \Rightarrow \delta x_A = L \cos \theta \delta \theta$

- (a) Trabalho virtual da força  $F$ :  $\delta W_F = -F \delta y_A = FL \sin \theta \delta \theta$

Trabalho virtual da força da mola:  $\delta W_{Mola} = (-kx) \delta x_A = -(kL \sin \theta) L \cos \theta \delta \theta$

Princípio dos trabalhos virtuais  $\delta W = FL \sin \theta \delta \theta - (kL \sin \theta) L \cos \theta \delta \theta = 0$

$$\Rightarrow \boxed{(FL - kL^2 \cos \theta) \sin \theta = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = 0 \\ -kL^2 \cos \theta + FL = 0 \end{cases} \quad (1,0)$$

Portanto, os possíveis ângulos  $\theta_{eq}$  de equilíbrio do sistema são  $\boxed{\theta_{eq} = 0}$  e  $\boxed{\theta_{eq} = \cos^{-1}\left(\frac{F}{kL}\right)}$ .

Supõe-se  $F > 0$ . Note que para que seja possível a existência da segunda solução, é necessário que  $\frac{F}{kL} \leq 1$ . Implicações desta condição de desigualdade na efetiva existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio não foram solicitadas ao aluno, mas serão discutidas ao final, por completude.

- (b) Energia cinética:  $E = E_{Barra} = \frac{1}{2} M \vec{V}_O \cdot \vec{V}_O + M \vec{V}_O \cdot \left[ \vec{\theta} \wedge (G - O) \right] + \frac{1}{2} \{ \dot{\theta} \}^T [I_O] \{ \dot{\theta} \}$ , em que  $\vec{V}_O = \vec{0}$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2$$

$$\text{Energia potencial: } V = V_E = \frac{1}{2} k x_A^2 = \frac{1}{2} k L^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Função Lagrangeana: } L = E - V = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k L^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Força generalizada: Para força } F, \delta W_F = -F \delta y_A \Rightarrow Q_\theta = -F \frac{\partial y_A}{\partial \theta} = FL \sin \theta$$

$$\text{Equação de Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL^2 \sin \theta \cos \theta$$



$$\Rightarrow \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + kL^2 \sin \theta \cos \theta = FL \sin \theta \quad (1,5)$$

(c) Em uma condição de equilíbrio,  $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow (FL - kL^2 \cos \theta) \sin \theta = 0$ , verificando a equação anteriormente deduzida via PTV. (0,5)

*Complementar - análise de estabilidade das possíveis posições de equilíbrio:*

Cumpra notar que, como  $F > 0$  é constante em intensidade, direção e sentido, pode ser dita conservativa e a ela pode ser associada uma função de energia potencial, de forma que a força generalizada  $Q_\theta$  possa ser dela diretamente derivada. De fato, seja  $V_F(\theta) = FL \cos \theta$  tal função, de sorte que  $Q_\theta = -F \frac{\partial V_F}{\partial \theta} = FL \sin \theta$ , a função de energia potencial será, então, a soma daquela de natureza elástica com esta associada à força conservativa, i.e.,

$$V(\theta) = V_E(\theta) + V_F(\theta) = \frac{1}{2} kL^2 \sin^2 \theta + FL \cos \theta.$$

Analisemos então as condições de equilíbrio. Isso implica em determinar e examinar os pontos de extremo (máximo ou mínimo local) da função de energia potencial. Estabilidade está associada a mínimo local e instabilidade a máximo local. As seguintes condições (necessárias e suficientes) para existência de mínimo local (equilíbrio estável) são:

$$\begin{cases} \frac{dV(\theta)}{d\theta} = 0 \\ \left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}} > 0 \end{cases}$$

A primeira condição gera a própria equação de equilíbrio, anteriormente determinada:

$$(FL - kL^2 \cos \theta) \sin \theta = 0.$$

Para examinar a condição de estabilidade é necessária a segunda derivada de  $V(\theta)$ , que fica escrita:

$$\frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} = kL^2 \cos 2\theta - FL \cos \theta = kL^2 (2 \cos^2 \theta - 1) - FL \cos \theta$$

Assim, a imposição da condição de estabilidade nas duas possíveis posições de equilíbrio implicaria em:

(i)  $\theta_{eq} = 0:$



$$\left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow kL - F > 0 \Rightarrow F < kL$$

e,

(ii)  $\theta_{eq} = \cos^{-1}\left(\frac{F}{kL}\right)$ , possível apenas se  $F \leq kL$ :

$$\left. \frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{F}{kL}\right)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( kL(2\cos^2\theta - 1) - F\cos\theta \right)_{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{F}{kL}\right)} = \left\{ kL \left[ 2\left(\frac{F}{kL}\right)^2 - 1 \right] - F \frac{F}{kL} \right\} = \frac{F^2}{kL} - kL > 0$$

$$\Rightarrow F > kL$$

No entanto, esta segunda condição é contraditória àquela relativa à existência da segunda posição de equilíbrio, que, como visto, exige  $F \leq kL$ . Portanto, se:

<p>(a) <math>F &lt; kL \Rightarrow \begin{cases} \theta_{eq} = 0 \text{ é ponto de equilíbrio estável} \\ \theta_{eq} = \cos^{-1}\left(\frac{F}{kL}\right) \text{ é ponto de equilíbrio instável} \end{cases}</math></p> <p>(b) <math>F \geq kL \Rightarrow \theta_{eq} = 0 \text{ é o único ponto de equilíbrio que, porém, é instável;}</math> <math>\therefore \text{não existe ponto de equilíbrio estável!}</math></p>
---





**4ª Questão** (3,5 pontos)

**Resolução:**

(a) As eqs. 1, 2 e 3 demonstram, de forma construtiva, que o movimento pode ser descrito por uma única coordenada generalizada  $\theta$ . A integração no tempo da eq. 1 permite calcular  $\theta(t)$ . A partir dos invariantes, eq. 2 e eq. 3, e do conhecimento de  $\theta(t)$ , calculam-se  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$ . (0,5)

A Figura 4 apresenta a trajetória do ponto A da haste do rotor. Observem que o ponto A descreve uma circunferência em um plano normal ao vetor quantidade de movimento angular, configurando uma precessão regular, com ângulo de nutação constante, de modo que os cones do espaço e do sólido são de revolução.

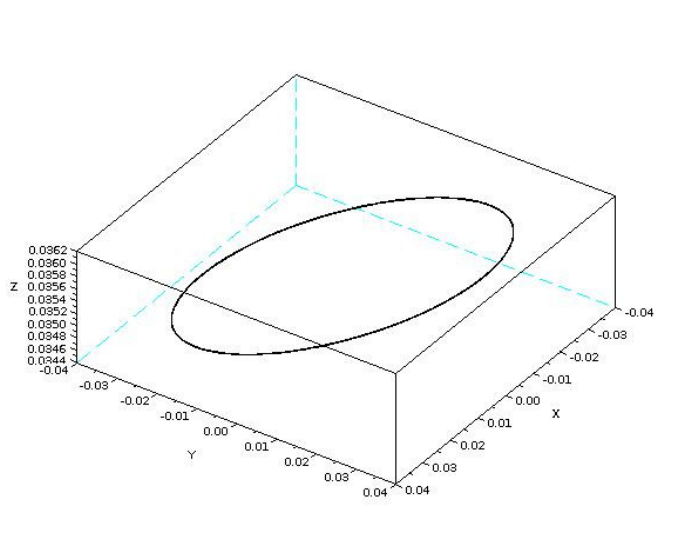


Figura 4: Trajetória do ponto A da haste do rotor

(b) Uma condição de precessão estacionária pode ser desenvolvida a partir da eq. 1, ao impor  $\ddot{\theta} = 0$ . Nesta condição, a precessão estacionária irá ocorrer com vetor quantidade de movimento angular na direção OZ.

A condição  $\ddot{\theta} = 0$  resulta,

$$(\alpha - \beta \cos(\theta))(\beta - \alpha \cos(\theta)) = 0 \quad (4)$$

e surgem duas condições:

$$(\alpha = \beta \cos(\theta)) \quad (5)$$

ou



$$(\beta = \alpha \cos(\theta)) \quad (6)$$

Da eq. 5, resulta

$$I\dot{\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) = 0 \quad (7)$$

que gera outras duas condições,  $\theta = 0$  ou  $\dot{\phi} = 0$ . Se não houver interesse nestas condições triviais, então devemos considerar a eq. 6, que pode ser detalhada

$$\beta = (I\dot{\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) + \beta \cos(\theta)) \cos(\theta) \quad (8)$$

Associando os termos em  $\beta$ , tem-se

$$\beta(1 - \cos^2(\theta)) = I\dot{\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) \quad (9)$$

ou

$$\beta \operatorname{sen}^2(\theta) = I\dot{\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\theta) \quad (10)$$

que, descartada a condição trivial  $\theta = 0$ , fornece

$$\beta = I\dot{\phi} \cos(\theta) \quad (11)$$

Substituindo a expressão de  $\beta$  (eq. 3) na eq. 11, tem-se

$$J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos(\theta)) = I\dot{\phi} \cos(\theta) \quad (12)$$

ou

$$J\dot{\psi} + (J - I)\dot{\phi} \cos(\theta) = 0 \quad (13)$$

que é a condição desejada **(1,0)**

(c) Ao introduzir a eq. 3 na eq. 2, tem-se

$$\alpha = I\dot{\phi} \operatorname{sen}^2(\theta) + \beta \cos(\theta) \quad (14)$$

que permite calcular  $\dot{\phi}$  em função de  $\theta(t)$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  **(0,5)**



# ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.  
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

---

## Departamento de Engenharia Mecânica

(d) A função  $\phi(t)$  pode ser calculada a partir de  $\dot{\phi}(t)$  por integração numérica, por exemplo, pela regra do retângulo, pela regra do trapézio, ou por uma quadratura mais precisa como a função integrate do Scilab. (0,5)

(e) Observa-se nos gráficos que as velocidades de precessão  $\dot{\phi}$  e de rotação própria  $\dot{\psi}$  têm sinais opostos. Da eq. 13, para  $\theta = \pi/4$ , conclue-se que  $J > I$  e que o corpo é achatado. (0,5)

(f) A integração da eq. 1 foi interrompida no instante  $t = 1$  s. A componente  $\dot{\theta}$  foi alterada no vetor de estado inicial, representando o efeito do momento impulsivo. Procedeu-se a integração numérica novamente a partir de  $t = 1$  s até  $t = 6$  s. (0,5)