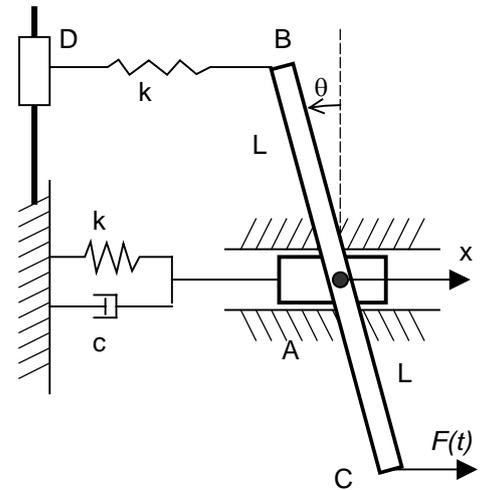




**3ª Prova de Mecânica B – PME 2200 – 26/06/2012**

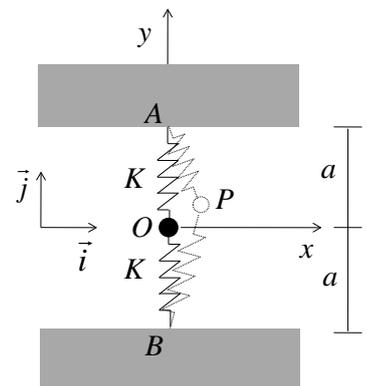
**Tempo de prova: 110 minutos (não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos)**

**1º Questão** (3,0 pontos) O bloco de massa  $m$  desliza sobre a guia horizontal sem atrito. A barra ABC de massa  $m$  e comprimento  $2L$  está articulada no pino A fixado no bloco. Uma mola de rigidez  $k$  tem suas extremidades ligadas ao ponto B da barra e ponto D da bucha de massa desprezível que desliza na direção vertical sem atrito mantendo a mola sempre na posição horizontal. Um conjunto mola/amortecedor tem uma de suas extremidades ligadas ao bloco, e possui constante elástica e viscosa  $k$  e  $c$ , conforme mostrado na figura. Uma força horizontal  $F(t)$  é aplicada no ponto C da barra. As molas não apresentam deformação na posição  $x_0=0$  e  $\theta_0=0$ . Pede-se obter em função das coordenadas generalizadas  $x$  e  $\theta$ :



- A energia cinética  $T$  do sistema;
- A energia potencial  $V$  do sistema;
- As forças generalizadas  $Q_i$  do sistema;
- As equações de movimento.

**2º Questão** (4,0 pontos) Uma pequena esfera de massa  $m$ , idealizada como um ponto material,  $P$ , pode se movimentar, sem atrito, sobre um plano horizontal. Esta esfera está ligada aos pontos  $A$  e  $B$ , das paredes verticais fixas, através de duas molas lineares idênticas, de constante elástica  $K$  e comprimento natural  $l$ . A distância entre as paredes verticais é  $2a$ . Utilizando as coordenadas generalizadas  $(x, y)$ , pede-se:



- Escrever a expressão da energia cinética do sistema;
- Escrever os vetores de posição relativa  $(P-A)$  e  $(P-B)$  e montar a função de energia potencial elástica do sistema;
- A partir das equações de *Lagrange*, deduzir as equações de movimento do sistema e mostrar que a origem  $O$  é ponto de equilíbrio;
- Das respectivas formas quadráticas das funções de energia cinética,  $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$ , e de energia potencial,  $V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$ , representativas do sistema em torno da posição de equilíbrio, onde  $\mathbf{q} = [x \ y]^T$  é o vetor de coordenadas generalizadas, escrever a matriz de massa  $\mathbf{M}$  e a matriz de

$$\text{rigidez } \mathbf{K} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{(0,0)} ;$$

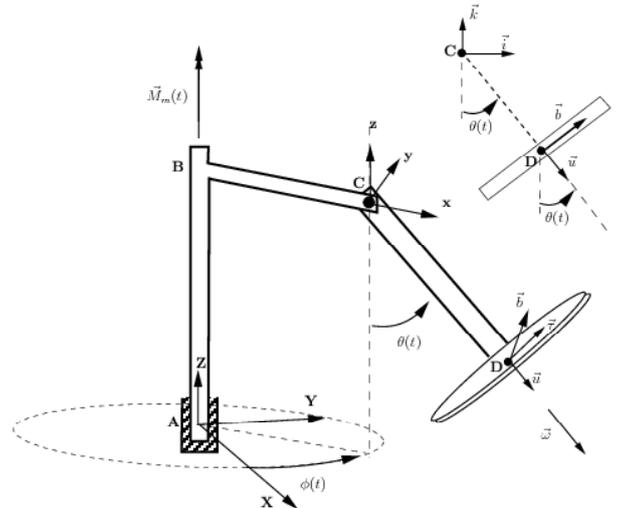


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

- e) Escrever as equações de equilíbrio linearizadas em torno da origem, expressando-as em forma matricial, em função das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$ .

**3º Questão** (3,0 pontos) EMSC #3

Considere o mecanismo mostrado na figura, formado pela peça rígida ABC, de massa desprezível, pela barra CD, também de massa desprezível, e pelo disco homogêneo D, de massa  $m$ . O sistema de coordenadas  $AXYZ$ , ao qual se associam os versores  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  e possui orientação fixa em um referencial inercial. Tanto o sistema de coordenadas  $Cxyz$ , que possui associados os versores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , quanto o sistema de coordenadas com origem em D e versores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , são solidários à barra CD, mas não ao disco D. O versor  $\vec{u}$  tem direção (D - C), o versor  $\vec{v}$  tem a mesma direção e sentido do versor  $\vec{j}$  e  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ .



O disco D gira com rotação constante  $\omega$  em torno do eixo CD. A peça ABC gira em torno do eixo fixo AB devido à ação de um momento externo  $Mn = [M - K(\theta - \theta_R)]$ . Em C existe um pino que permite rotação da barra CD somente em torno do eixo Cy (isto é, o vetor  $\dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{j}$  é sempre ortogonal ao plano móvel Cxz) e que impõe ao movimento um torque de atrito de natureza viscosa linear cujo coeficiente é  $b$ . São conhecidas as dimensões  $AB = h$ ,  $BC = H$ ,  $CD = L$  e o raio  $R$  do disco D. Pedem-se:

- Escrever a expressão da energia cinética do sistema em função das coordenadas generalizadas  $\theta$  e  $\phi$  (represente as velocidades necessárias utilizando a base D  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ );
- Escrever a expressão da energia potencial do sistema em função destas mesmas coordenadas generalizadas;
- Escrever as expressões das forças generalizadas associadas às forças não-conservativas (se quiser, utilize a função de dissipação de *Rayleigh*);

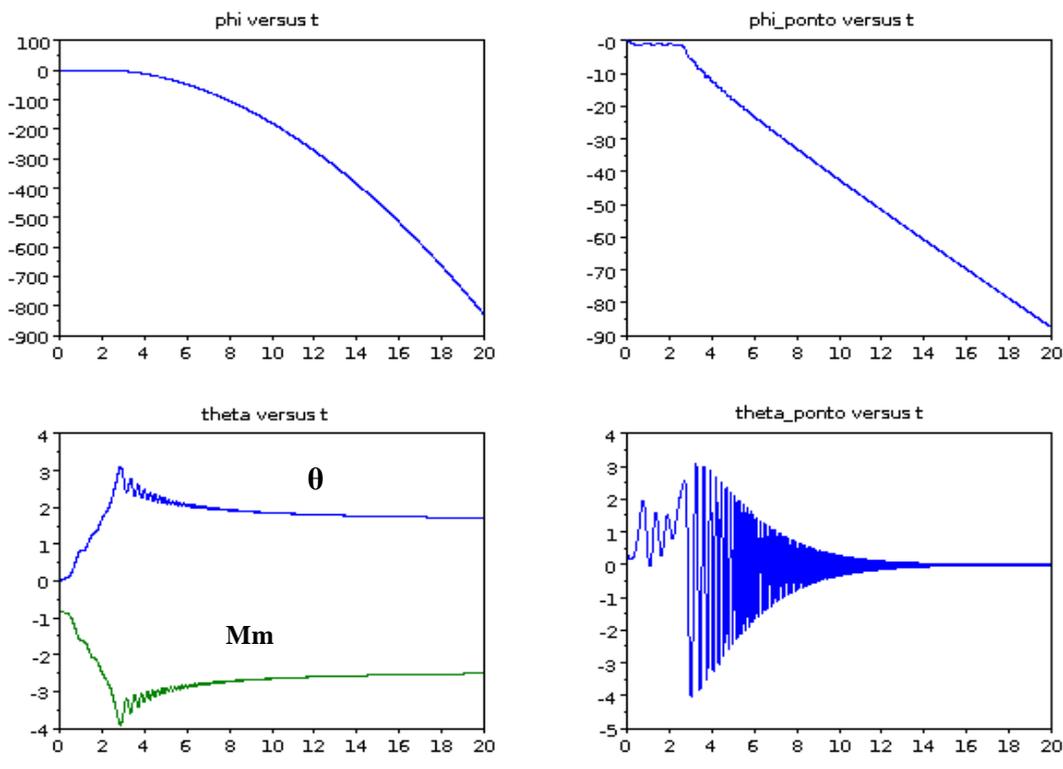
A partir do modelo matemático obtido, foram realizadas cinco simulações conforme tabela abaixo. Dentre as simulações para as quais  $K$  (ganho do controlador) é diferente de zero, uma delas é mostrada no conjunto de gráficos abaixo. Pergunta-se:

- A qual simulação correspondem os gráficos?
- Qual é o efeito dinâmico dominante que explica o valor limite atingido pela coordenada  $\theta$ ? Explique.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

Variável	1	2	3	4	5
K	0	0	1,0	1,0	1,0
$\theta_0$	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}_0$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
$\phi_0$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$
$\dot{\phi}_0$	0	0	0	0	0
$b[N.m.s/rad]$	0	0.1	0.1	0.1	0.1
$\theta_{ref}[rad]$	----	-----	0,8	2,0	-0,8



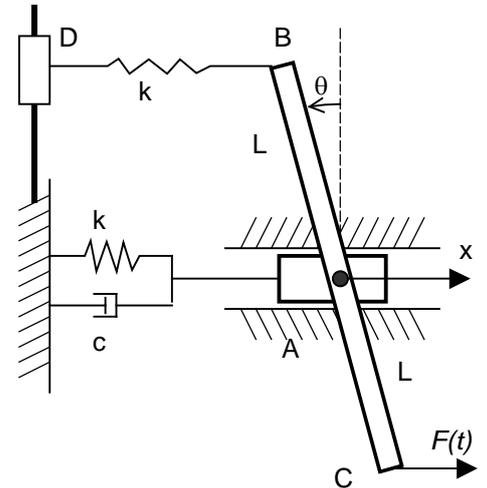
- 4º Questão** (1,0 pontos) Refere-se à palestra de 14/06/2012; você pode optar por a) ou b)
- a) Cite ao menos três cientistas que contribuíram no tema ‘dinâmica de sistemas mecânicos de massa variável’, destacando contexto e principal contribuição. Cite ao menos três exemplos de problemas abordados na palestra, ilustrando-os.
- b) Enuncie, com suas palavras, o Princípio de Relatividade de *Galileu*. Mostre que a Equação atribuída a *Mechersky* satisfaz este princípio.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

**Resolução da 1ª Questão (3,0 pontos)**

O bloco de massa  $m$  desliza sobre a guia horizontal sem atrito. A barra ABC de massa  $m$  e comprimento  $2L$  está articulada no pino A fixado no bloco. Uma mola de rigidez  $k$  tem suas extremidades ligadas ao ponto B da barra e ponto D da bucha de massa desprezível que desliza na direção vertical sem atrito mantendo a mola sempre na posição horizontal. Um conjunto mola/amortecedor tem uma de suas extremidades ligadas ao bloco, e possui constante elástica e viscosa  $k$  e  $c$ , conforme mostrado na figura. Uma força horizontal  $F(t)$  é aplicada no ponto C da barra. As molas não apresentam deformação na posição  $x_0 = 0$  e  $\theta_0 = 0$ . Pede-se obter em função das coordenadas generalizadas  $x$  e  $\theta$ :



a) A energia cinética  $T$  do sistema;

$T = T_{bloco} + T_{barra}$  para o bloco tem-se:  $T_{bloco} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$  (0,5) e para a barra:

$$T_{barra} = \frac{1}{2} m V_A^2 + m \vec{V}_A \cdot [\vec{\omega} \wedge (G - A)] + \frac{1}{2} \{\vec{\omega}\}^T [J]_A \{\vec{\omega}\} \quad T_{barra} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 0 + \frac{1}{2} \frac{m(2L)^2}{12} \dot{\theta}^2 \quad (0,5)$$

$$T = m \dot{x}^2 + \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2$$

b) A energia potencial  $V$  do sistema e a função dissipativa  $R$  são;

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (x - L \sin \theta)^2 \quad (0,5) \quad \text{e} \quad R = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad (0,5)$$

c) As forças generalizadas  $Q_i$  do sistema: sendo a força  $F(t)$  aplicada na direção  $\vec{i}$  e a posição do ponto C nesta direção dada por  $x_C = x + L \sin \theta$

$$Q_x = F \cdot \frac{\partial x_C}{\partial x} = F \quad \text{e} \quad Q_\theta = F \cdot \frac{\partial x_C}{\partial \theta} = F L \cos \theta \quad (0,5)$$

d) As equações diferenciais de movimento obtidas pelo método de Lagrange são: (0,5)  
As derivadas parciais para a coordenada  $x$  são:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m \dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 2m \ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2k x - kL \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c \dot{x}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = Q_x \quad \rightarrow \quad \boxed{2m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx - kL\sin\theta = F}$$

Para a coordenada  $\theta$  tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = kxL\cos\theta - kL^2\sin\theta\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = Q_\theta \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} - kxL\cos\theta + kL^2\sin\theta\cos\theta = FL\cos\theta}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

**Resolução da 2ª Questão (4,0 pontos)**

- (a) Com  $(P - O) = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} = \mathbf{q}$ , a energia cinética do sistema fica simplesmente expressa como,

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (1)$$

(0,5)

Note que esta é uma forma puramente quadrática.

- (b) Os vetores de posição relativa,  $(P-A)$  e  $(P-B)$ , são respectivamente expressos por:

$$\begin{aligned} (P - A) &= (P - O) + (O - A) = x\vec{i} + (y - a)\vec{j} \\ (P - B) &= (P - O) + (O - B) = x\vec{i} + (y + a)\vec{j} \end{aligned} \quad (2)$$

(0,5)

De tal forma que os alongamentos das molas são dados por:

$$\begin{aligned} \delta_A &= |P - A| - \ell = \left[ (x^2 + (y - a)^2)^{1/2} - \ell \right] \\ \delta_B &= |P - B| - \ell = \left[ (x^2 + (y + a)^2)^{1/2} - \ell \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, a função de energia potencial fica expressa:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} K \delta_A^2 + \frac{1}{2} K \delta_B^2 = \\ &= \frac{1}{2} K \left\{ \left[ (x^2 + (y - a)^2)^{1/2} - \ell \right]^2 + \left[ (x^2 + (y + a)^2)^{1/2} - \ell \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

(0,5)

- (c) As respectivas equações de Lagrange são:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

As derivadas parciais envolvidas são prontamente calculadas como:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x} &= Kx \left[ 2 - \left( \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} + \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial y} &= K \left[ (y-a) \left( 1 - \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} \right) + (y+a) \left( 1 - \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

O que conduz às equações de movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + Kx \left[ 2 - \left( \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} + \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] = 0 \\ m\ddot{y} + K \left[ (y-a) \left( 1 - \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} \right) + (y+a) \left( 1 - \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(0,5)

Note o acoplamento elástico de natureza não linear presente nos sistema de equações.

É fácil ainda verificar que a origem  $O$  é um ponto de equilíbrio. De fato:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{(0,0)} = K \left[ -a \left( 1 - \frac{\ell}{a} \right) + a \left( 1 - \frac{\ell}{a} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (8)$$

(0,5)

Ou seja, na ausência de forças externas, tem-se:  $\ddot{x}|_{(0,0)} = 0$  e  $\ddot{y}|_{(0,0)} = 0$ .

(d) Como observado, a função de energia cinética, Eq. (1), é puramente quadrática,  $T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^t \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$ , de onde decorre de imediato:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}. \quad (9)$$

(0,5)

A matriz Hessiana,  $\mathbf{H} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]$ , pode ser facilmente construída a partir das derivadas parciais primeiras da função de energia potencial, calculadas com respeito às coordenadas generalizadas, conforme expressas em (6). De fato:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= K \left[ 2 - \left( \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} + \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] + Kx^2 \ell \left[ \frac{1}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + (y+a)^2)^{3/2}} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = Kx \ell \left[ \frac{(y-a)}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{(y+a)}{(x^2 + (y+a)^2)^{3/2}} \right] \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= K \left[ 2 - \left( \frac{\ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{1/2}} + \frac{\ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{1/2}} \right) \right] + K \left[ \frac{(y-a)^2 \ell}{(x^2 + (y-a)^2)^{3/2}} + \frac{(y+a)^2 \ell}{(x^2 + (y+a)^2)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , em torno do ponto de equilíbrio, é a matriz Hessiana,  $\mathbf{H}$ , calculada nesse ponto. Para tanto, pode-se facilmente verificar que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} &= 2K \left( 1 - \frac{\ell}{a} \right) \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right|_{(0,0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} &= 2K \end{aligned} \quad (11)$$

Assim, a matriz de rigidez, calculada na origem, fica simplesmente expressa por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}|_{(0,0)} = 2K \begin{bmatrix} (1-\ell/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(0,5)

Observe que a matriz de rigidez é diagonal, o que significa que, em torno da origem, os acoplamentos elásticos entre as coordenadas generalizadas são de segunda ordem ou de ordem superior;

(e) As equações de equilíbrio linearizadas em torno da origem são então escritas:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{q} = [x \quad y]^T \\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = 2K \begin{bmatrix} (1-\ell/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(0,5)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

Observe, por fim, que:

- (i) Se  $\ell/a < 1$ , a matriz de rigidez é definida positiva. Isso significa que a origem é um ponto de equilíbrio estável. Na terminologia de sistemas dinâmicos, o ponto de equilíbrio é denominado 'centro'. Fisicamente, esta condição significa que as molas estão pré-tensionadas na situação de equilíbrio.
- (ii) Já, se  $\ell/a > 1$  a matriz de rigidez é definida negativa (determinante negativo) e a origem passa a ser um ponto de equilíbrio instável. Nesta situação as molas estão pré-comprimidas na posição de equilíbrio. Na terminologia de sistemas dinâmicos, esse tipo de ponto de equilíbrio é denominado 'ponto de sela'. Nesta condição, dois outros pontos de equilíbrio estável (centros) surgem simetricamente posicionados em relação à origem. Tais pontos podem ser determinados a partir das raízes do sistema algébrico de equações:  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ , onde  $V(x,y)$  é a função não linear
- (4).
- (iii) Por fim, se  $\ell/a = 1$ , o determinante da matriz de rigidez é nulo. Esse ponto de equilíbrio é um 'centro limítrofe'. Nessa situação limítrofe, as molas estão em seu estado natural na posição de equilíbrio. A rigidez na direção transversal às molas é nula na origem. Diz-se que essa condição constitui uma 'bifurcação', transformando o 'centro' em um 'ponto de sela' acompanhado de dois outros 'centros' que o ladeiam.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

**Resolução da 3ª Questão (3,0 pontos)**

(a) O vetor rotação absoluta do disco é dado por: (1,0)

$\vec{\Omega} = \omega \sin \theta \vec{i} - \dot{\theta} \vec{j} + (\dot{\phi} - \omega \cos \theta) \vec{k}$ . Com a transformação de coordenadas

$$\vec{i} = \sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{b}$$

$$\vec{j} = \vec{t}$$

$$\vec{k} = -\cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{b}$$

o vetor rotação se escreve como

$$\vec{\Omega} = (\omega - \dot{\phi} \cos \theta) \vec{u} - \dot{\theta} \vec{t} + \dot{\phi} \sin \theta \vec{b}$$

A velocidade do baricentro do disco é

$$\vec{v}_D = \dot{\theta} L \cos \theta \vec{i} + \dot{\phi} (L \sin \theta + H) \vec{j} + \dot{\theta} L \sin \theta \vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_D = \dot{\theta} L \vec{b} + \dot{\phi} (L \sin \theta + H) \vec{t}$$

A energia cinética referida ao baricentro é, portanto,

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_D|^2 + \frac{1}{2} [\vec{\Omega}]^T J_G [\vec{\Omega}]$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 (L \sin \theta + H)^2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega - \dot{\phi} \cos \theta & -\dot{\theta} & \dot{\phi} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_u & 0 & 0 \\ 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & J_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega - \dot{\phi} \cos \theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 L^2 + \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 (L \sin \theta + H)^2 + \frac{1}{2} (J_u (\omega - \dot{\phi} \cos \theta)^2 + J_t \dot{\theta}^2 + J_b \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

(b) Considerando a configuração de referência para a energia potencial como a origem do sistema de coordenadas AXYZ tem-se: (0,5)

$$V = mg(h - L \cos \theta)$$

(c) As forças generalizadas podem ser escritas diretamente em função das coordenadas generalizadas pois (0,5)

$$\delta \tau^{nc} = Q_\phi \delta \phi + Q_\theta \delta \theta = M_m \delta \phi - b \dot{\theta} \delta \theta \quad \therefore$$

$$Q_\phi = M_m$$

$$Q_\theta = -b \dot{\theta}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

Outra maneira de obter a força generalizada na coordenada  $\theta$  seria através da função de dissipação de Rayleigh, uma vez que trata-se de atrito de natureza viscosa. Assim,

$R = \frac{1}{2} b \dot{\theta}^2$  e o trabalho virtual das forças dissipativas pode ser obtido a partir de

$$\delta\tau = Q_{\theta} \delta\theta = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \delta\theta = -b\dot{\theta} \delta\theta \Rightarrow$$

$$Q_{\theta} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -b\dot{\theta}$$

(d) os gráficos mostrados pertencem à simulação 5, que foi a única para a qual o controlador proporcional não foi capaz de regular o sistema em valor próximo ao especificado. (0,5)

(e) O efeito dinâmico dominante é o da força de inércia do sistema desbalanceado girando em torno de um eixo fixo (AB), ou seja, o da força centrífuga. Percebe-se que, com a imposição da regulação em  $\theta_{ref} = 0,8$  rad (valor que corresponde a uma posição no quarto quadrante do sistema de coordenadas Cxyz), a lei de controle fornece, a partir das condições iniciais (disco na menor cota vertical), (0,5)

$$M_m = M - K(\theta - \theta_{ref}) = -1(0 - (-0,8)) < 0,$$

valor negativo, o que significa impor momento ao eixo AB no sentido (A-B), de modo a fazer o sistema se aproximar da posição desejada devido à ação do binário giroscópico reativo do disco. Ocorre que, devido ao contínuo aumento na rotação do eixo AB ( $\Phi$ , precessão, como evidenciado pelos dois gráficos na linha superior) o efeito do momento da força de inércia (centrífuga) da massa desbalanceada, que tende a aumentar o ângulo  $\theta$  (nutação) em relação ao eixo AB é superior ao do momento da força peso aliado ao do binário giroscópico reativo, existente devido à rotação própria do disco.

No limite, o aumento na rotação de precessão faz com que o eixo CD praticamente se alinhe à direção Bx (horizontal), situação correspondente a um ângulo de nutação constante e próximo de  $\pi/2$  radianos (o valor final exato é de 1,65 radianos), com conseqüente estabilização da rotação de nutação em valor nulo, afirmações estas que podem ser evidenciadas pelos gráficos da linha inferior.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

**Resolução da 4ª Questão (1,0 pontos)**

a) Cite ao menos três cientistas que contribuíram no tema ‘dinâmica de sistemas mecânicos de massa variável’, destacando contexto e principal contribuição. Cite ao menos três exemplos de problemas abordados na palestra, ilustrando-os.

I - Inúmeros são os cientistas que se dedicaram ao tema. De fundamental importância podemos citar: (0,5)

1. *Von Buquoy*, cientista tcheco, de origem belga, início do século XIX; pioneiro e responsável pela primeira formulação explícita da equação de movimento de corpos de massa variável; ilustrou o equacionamento através do problema da corrente sendo suspensa de ou caindo sobre uma mesa.
2. *Arthur Cayley*, matemático britânico, meados do século XIX; formulou o problema da corrente sob a ótica da Mecânica Analítica.
3. *Ivan V. Meschchersky*, cientista russo, final do século XIX e início do século XX; responsável pela formalização da equação de movimento de sistemas materiais de massa variável e pela introdução de seu ensino no leste europeu; a quem se atribui a forma da segunda lei de Newton aplicável a pontos materiais de massa variável, conhecida como equação de Meschchersky.
4. *Levi-Civita*, matemático italiano, início do século XX; tratou o problema elementar de sistemas de massa variável quando a massa agregada/perdida tem velocidade nula com respeito ao referencial inercial considerado.
5. *McIver*, cientista inglês, século XX, década de 70; responsável pela extensão do Teorema do Transporte de Reynolds, através de formulação da Mecânica Analítica, no âmbito de sistemas de massa variável.
6. *Livja Cveticanin*, cientista sérvia, final do século XX e presente; formalização da mecânica analítica no contexto de sistemas de massa variável e autoria de livro específico no tema, aplicado à dinâmica de máquinas que exibem variação de massa.
7. *Hans Irschik*, mecanicista austríaco, final do século XX e presente; revisão do tema e dedução das equações de Lagrange para volumes não-materiais.

II – Exemplos de problemas abordados na palestra:

(0,5)

1. *Diversas versões do ‘problema da corrente’*: que cai a partir de uma mesa; que cai sobre uma mesa; em “U”.
2. *Problema do foguete*: primeiro e segundo problemas de Tsiolkovsky.
3. *Dinâmica da coluna d’água no interior de um tubo aberto e que atravessa a superfície livre de um líquido, na presença de campo gravitacional.*
4. *Colapso vertical de torres e edifícios.*
5. *Lançamento de cabos submarinos;*
6. *Problema de impacto de um corpo sólido contra a superfície de um líquido (impacto hidrodinâmico).*
7. *Problema elementar de uma partícula cuja massa varia com a posição.*



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Departamento de Engenharia Mecânica

---

b) Enuncie, com suas palavras, o Princípio de Relatividade de *Galileu*. Mostre que a Equação atribuída a *Mechersky* satisfaz este princípio.

O *Princípio de Relatividade de Galileu* afirma que as leis fundamentais da física são as mesmas em todos referenciais inerciais. (0,5)

No caso em análise, considerando-se dois referenciais inerciais, define-se: (i)  $\vec{v}$  como a velocidade da partícula medida em relação a um dos referenciais e (ii)  $\vec{v}'$  como a velocidade da partícula medida em relação ao outro. Seja  $\vec{v}_{rel}$  a velocidade relativa entre os dois referenciais inerciais, de forma que,  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{rel} \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}'$ . Assim, a Equação de *Mechersky* pode ser transformada de um referencial para o outro como segue:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{w} = \\ &= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{w} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) + m\frac{d\vec{v}'}{dt} - \frac{dm}{dt}(\vec{w}' + \vec{v}_{rel}) = \\ &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}') - \frac{dm}{dt}\vec{w}'\end{aligned}$$

Ou seja, a identidade, na forma, mostra a invariância da equação de *Mechersky* com respeito à escolha do referencial inercial. (0,5)

Observa-se ainda que, ao contrário, a simples relação  $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$  depende da escolha do referencial e, portanto, não obedece ao *Princípio de Relatividade de Galileu*. De fato,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \\ &= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}' + \vec{v}_{rel}) + m\frac{d\vec{v}'}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt}(m\vec{v}') + \frac{dm}{dt}\vec{v}_{rel}\end{aligned}$$