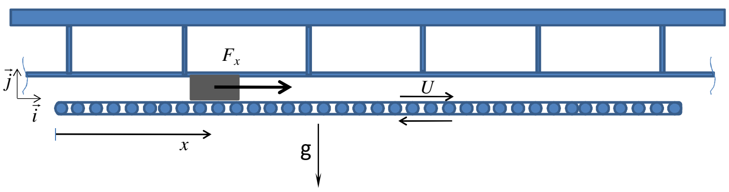
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 21 de junho de 2011
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (1,0 ponto)



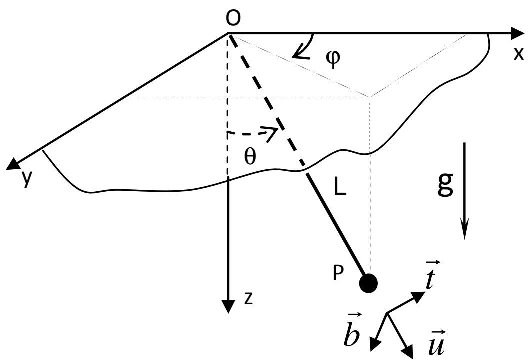
Na palestra do dia 31 de maio foi dada interpretação consistente à aplicação da segunda Lei de Newton *a uma partícula de massa variável*, a qual, em um referencial inercial, é escrita na forma de Mechersky:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \dot{m}(\vec{u} - \vec{v}) \qquad (1)$$

Em (1), $\vec{F}$ é a força atuante sobre a partícula, $\vec{v}$ é sua velocidade e $\vec{u}$ é a velocidade da massa que é ganha (ou perdida) imediatamente antes (ou depois) do processo de ganho (ou perda). Considere agora um bloco de massa $m(t)$, deslocando-se sem atrito, ao longo de uma guia, por onde é suspenso. O bloco, em translação retilínea, pode ser modelado como se fosse uma partícula. A guia é reta e paralela a uma esteira, que por sua vez se move com velocidade constante U. O bloco absorve massa particulada da esteira, de forma que a taxa de aumento de sua massa é dada pela lei $\dot{m} = Ce^{-a|\dot{x}-U|}; C > 0; a > 0$. Considere que as partículas atraídas, no momento da adesão, têm velocidade $\vec{u} = U\vec{i} + W\vec{j}$. É conhecida a massa do bloco, m_0, antes do início do processo de transferência de massa. Pede-se:

(a) Determine a força reativa normal $\vec{N} = F_y\vec{j} = N\vec{j}$, aplicada pela guia ao bloco, decorrente do processo de transferência de massa. Interprete o resultado.
(b) Deduza a lei que deve reger a intensidade de uma força F_x, a ser aplicada ao bloco, de forma a fazê-lo movimentar-se ao longo da guia com velocidade constante $v = V$.
(c) O que acontece se $v = V = U$? Interprete o resultado.

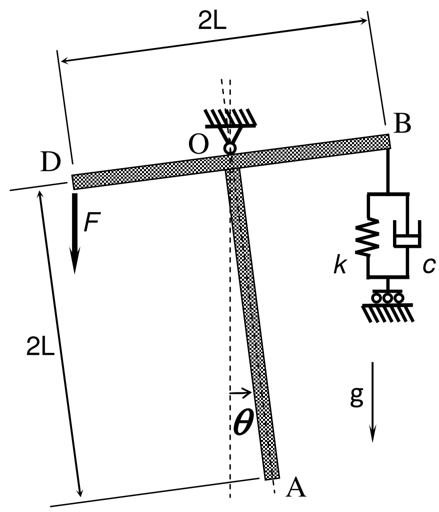
2ª Questão (3,0 pontos)



O pêndulo esférico da figura é composto por uma barra de comprimento L e peso desprezível e uma partícula P de massa m. O pêndulo está articulado por uma rótula esférica O, sem atrito. Considerando as coordenadas generalizadas θ e φ, pede-se:

(a) determinar a energia cinética T do pêndulo esférico (use o triedro ortonormal $\vec{u}$, $\vec{t}$, $\vec{b}$, onde $\vec{t}$ pertence ao plano POz e $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{t}$);
(b) determine $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ e a forca generalizada não conservativa Q_φ;
(c) deduzir as equações de movimento do pêndulo esférico, usando o formalismo de Lagrange;
(d) tendo em vista os valores do ítem (c) e a equacao de Lagrange, mostre que a quantidade de movimento angular generalizada na coordenada φ, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, é invariante.

3ª Questão (3,5 pontos)



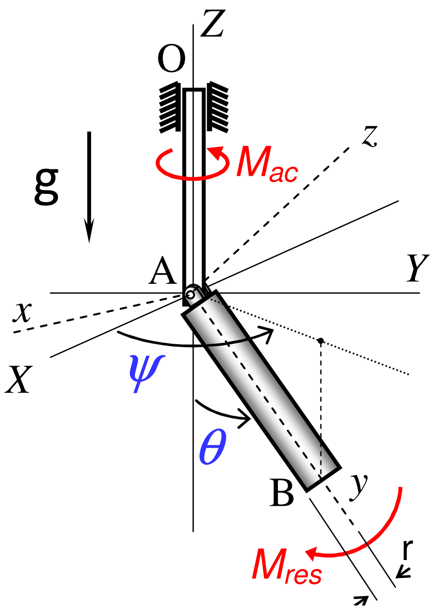
No sistema plano mostrado na figura, a peça em forma de T, articulada no ponto O, é formada por duas barras homogêneas de massa $2m$ e comprimento $2L$. A peça está acoplada no ponto B a um conjunto composto por mola de rigidez k e por amortecedor viscoso linear de constante c. Este conjunto mola-amortecedor não tem restrições de movimento na horizontal e permanece na vertical para qualquer valor de θ, sem perder o contato com o solo. A mola tem deformação nula quando $\theta = 0$. Uma força vertical F(t) é aplicada ao ponto D, conforme ilustrado na figura. Usando θ como coordenada generalizada, pede-se:

(a) A equação de movimento usando o método de Lagrange
(b) Fazendo F(t) = 0, determinar a posição de equilíbrio
(c) Linearizar a equação de movimento em torno da posição de equilíbrio do item (b)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

4ª Questão (3,5 pontos) **- Baseada no EMSC#3**



O sistema mostrado na figura é composto pela barra *OA*, de massa desprezível, e pela barra cilíndrica *AB*, de raio *r*, massa *m* e comprimento *L*. Os sistemas de coordenadas *Axyz* (solidário à barra *AB*) e *AXYZ* são tais que θ é o ângulo entre os eixos *Ay* e *AZ* e ψ é o ângulo entre o eixo *AX* e a projeção do eixo *Ay* sobre o plano *XY*. O vínculo no ponto *A*, entre as barras *OA* e *AB*, só permite a rotação relativa da barra *AB* em torno do eixo *Ax*, que, por sua vez, está sempre no plano *XY*. No vínculo em *A* <u>há uma mola</u>, que fornece um momento $\vec{M}_{mola} = -k\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\vec{i}$ na barra *AB*. O sistema é igualmente solicitado por um torque de acionamento $\vec{M}_{ac} = \left[M - b\frac{1}{|\dot{\psi}| + tol}\right]\vec{K}$ e por um torque resistivo $\vec{M}_{res} = -c\dot{\theta}\,\vec{i}$

Dados – Momentos de inércia em relação ao baricentro de cilindro de raio *r*, comprimento *L* e massa *m* com eixo longitudinal paralelo a y: $J_y = \frac{mr^2}{2}$, $J_x = J_z = \frac{m\left(3r^2 + L^2\right)}{12}$

Tabela 1: Condições analisadas no EMSC#3

Condição	c (Nms/rad)	M (Nm)	b (Nmrad/s)	$\theta(0)$ (rad)	$\dot{\theta}(0)$ (rad/s)	$\psi(0)$ (rad)	$\dot{\psi}(0)$ (rad/s)
1	0	0	0	π/12	0	0	0
2	0	0	0	π/12	0	0	40
3	0	1	40	π/12	0	0	0
4	0.1	1	40	π/12	0	0	0
5	0	1	4	π/12	0	0	-3.7

Pede-se:

a) Calcular a energia cinética do sistema usando θ e ψ como coordenadas generalizadas.
b) Determinar as equações do movimento para as coordenadas θ e ψ, usando o método de Lagrange.
c) Observando-se a Figura 1, identifique a coordenada generalizada representada no gráfico, bem como a condição na Tabela 1 correspondente a esta figura. Explique o porquê deste comportamento.
d) Observando-se a Figura 2, identifique a coordenada generalizada representada no gráfico, bem como a condição na Tabela 1 correspondente a esta figura. Explique o porquê deste comportamento.

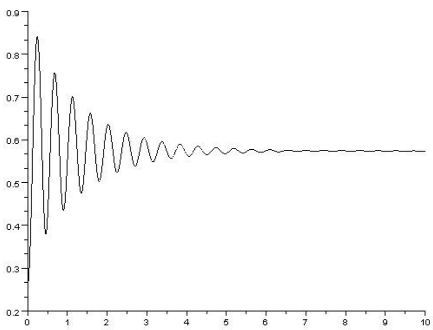


Figura 1

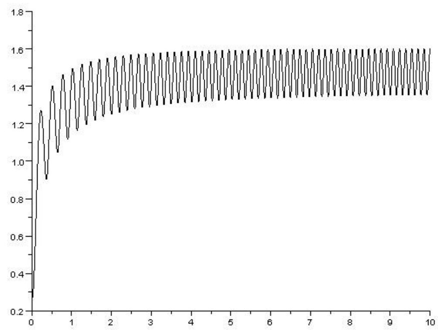
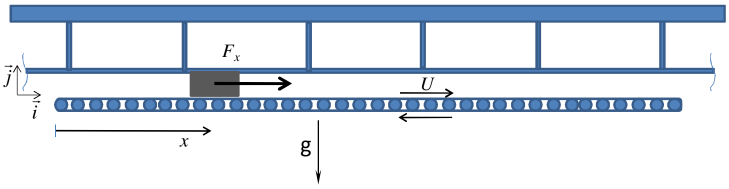


Figura 2

RESOLUÇÃO

1ª Questão (1,0 ponto)



Na palestra do dia 31 de maio foi dada interpretação consistente à aplicação da segunda Lei de Newton *a uma partícula de massa variável*, a qual, em um referencial inercial, é escrita na forma de Mechersky:

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \dot{m}(\vec{u} - \vec{v}) \qquad (1)$$

Em (1), $\vec{F}$ é a força atuante sobre a partícula, $\vec{v}$ é sua velocidade e $\vec{u}$ é a velocidade da massa que é ganha (ou perdida) imediatamente antes (ou depois) do processo de ganho (ou perda). Considere agora um bloco de massa $m(t)$, deslocando-se sem atrito, ao longo de uma guia, por onde é suspenso. O bloco, em translação retilínea, pode ser modelado como se fosse uma partícula. A guia é reta e paralela a uma esteira, que por sua vez se move com velocidade constante U. O bloco absorve massa particulada da esteira, de forma que a taxa de aumento de sua massa é dada pela lei $\dot{m} = Ce^{-a|\dot{x}-U|}; C > 0; a > 0$. Considere que as partículas atraídas, no momento da adesão, têm velocidade $\vec{u} = U\vec{i} + W\vec{j}$. É conhecida a massa do bloco, m_0, antes do início do processo de transferência de massa. Pede-se:

(a) Determine a força reativa normal $\vec{N} = F_y\vec{j} = N\vec{j}$, aplicada pela guia ao bloco, decorrente do processo de transferência de massa. Interprete o resultado.

(b) Deduza a lei que deve reger a intensidade de uma força F_x, a ser aplicada ao bloco, de forma a fazê-lo movimentar-se ao longo da guia com velocidade constante $v = V$.

(c) O que acontece se $v = V = U$? Interprete o resultado.

<u>Solução:</u>

(a) Da Eq. (1), com $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$ e sabendo que $\dot{y} = 0$ e $\ddot{y} = 0$, segue, na direção $\vec{j}$, que $F_y = N = m(t)g - \dot{m}W = m_0 g + \int_0^t \dot{m}(t)g\,dt - \dot{m}W = m_0 g + \int_0^t Ce^{-a|\dot{x}-U|}g\,dt - WCe^{-a|\dot{x}-U|}; C > 0; a > 0$. Ou seja, a guia aplicará ao bloco uma força a ela perpendicular, composta por uma parcela reativa à força peso (que varia no tempo devido ao aumento de massa) e uma segunda parcela, de intensidade igual ao produto entre a taxa de transferência de massa e a componente vertical de velocidade das partículas transferidas. Esta segunda parcela tem o sentido oposto ao da componente vertical de velocidade das partículas que são transferidas através de um processo de 'impacto contínuo'.

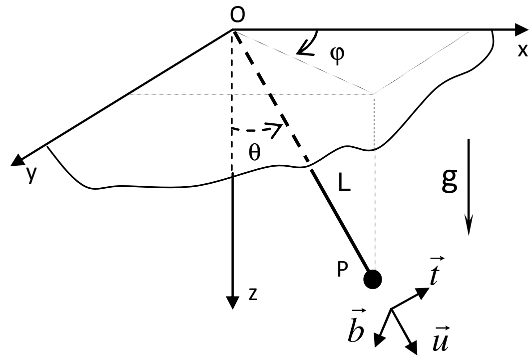
(b) Também da Eq. (1), considerando a translação na direção x, tal que $v = \dot{x}$, a respectiva equação de movimento fica dada por $m\ddot{x} + \dot{m}(\dot{x} - U) = F_x$. Assim, a força a ser aplicada ao bloco, de forma a manter sua velocidade constante, $v = V$, será dada por $F_x = \dot{m}(V - U)$. Esta força é igual ao produto entre a taxa de transferência de massa e a velocidade relativa. Se o bloco tiver velocidade superior à velocidade da esteira, a força a ser a ele aplicada deverá ser positiva (considerando acréscimo de massa). Sob a particular lei de transferência de massa aqui considerada, a força a ser aplicada toma a forma $F_x = Ce^{-a|xV-U|}(V - U)$. Note que tal força terá então intensidade exponencialmente decrescente com a velocidade relativa.

(c) A taxa de transferência de massa será máxima quando a velocidade relativa for nula, i.e., $v = V = U$. Por outro lado, *nesse caso*, o bloco manter-se-á com velocidade constante, aumentando sua quantidade de movimento, via aumento de massa, sem que força alguma precise a ele ser aplicada, na direção da translação retilínea. Isso ocorre porque, *nesse caso*, as partículas transferidas ao bloco são transportadas pela esteira com velocidade horizontal idêntica à do bloco, $U = V = v$, a qual se deseja manter constante.

(*) Caberia ainda discutir a lei de aplicação de torque ao eixo de tração da esteira, de forma a manter sua velocidade constante durante o processo de alimentação e de transferência de massa ao bloco. O estudo de um problema industrial, envolvendo um conjunto seriado de blocos, seria analogamente abordado. O problema de controle a ele associado estaria então bem posto, como o de um regulador de velocidades.

2ª Questão (3,0 pontos)

O pêndulo esférico da figura é composto por uma barra de comprimento L e peso desprezível e uma partícula P de massa m. O pêndulo está articulado por uma rótula esférica O, sem atrito. Considerando as coordenadas generalizadas θ e φ, pede-se:



(a) determinar a energia cinética T do pêndulo esférico (use o triedro ortonormal $\vec{u}$, $\vec{t}$, $\vec{b}$, onde $\vec{t}$ pertence ao plano POz e $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{t}$);

(b) determine $\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ e a forca generalizada não conservativa Q_φ;

(c) deduzir as equações de movimento do pêndulo esférico, usando o formalismo de Lagrange;

(d) tendo em vista os valores do ítem (c) e a equacao de Lagrange, mostre que a quantidade de movimento angular generalizada na coordenada φ, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, é invariante.

Solução:

(a)

$$P - O = L\vec{u}, \qquad (1)$$

e a velocidade de P é a derivada da posição

$$\vec{v}_P = L\dot{\vec{u}} = L\left(\dot{\theta}\,\vec{b} + \phi\,\vec{K}\right)\wedge \vec{u} \qquad (2)$$

Entretanto, o versor $\vec{K}$ precisa ser descrito na base especificada,

$$\vec{K} = \cos\theta\,\vec{u} - sen\theta\,\vec{t} \qquad (3)$$

Ao substituir $\vec{K}$ da eq. 3 na eq. 2 resulta

$$\vec{v}_P = L\left(\dot{\theta}\,\vec{b} + \dot{\phi}\,sen\theta\,\vec{t}\right) \qquad (4)$$

A energia cinética pode ser calculada,

$$T = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 sen^2\theta\right) \qquad (5)$$

(b) A energia potencial depende apenas da força gravitacional

$$V = mgL\left(1 - \cos\theta\right) \qquad (6)$$

e a derivada parcial com respeito a ϕ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \qquad (7)$$

Da energia cinética,

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \tag{8}$$

e do trabalho virtual não conservativo

$$\delta W = 0 \Rightarrow Q_\phi = 0 \tag{9}$$

(c)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = mL^2\left(\dot{\phi}\ sen^2\theta\right) \tag{10}$$

e, portanto, a derivada da quantidade de movimento torna-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = mL^2\left(\ddot{\phi}\ sen^2\theta\right) + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\ sen\theta\cos\theta \tag{11}$$

Lembrando alguns resultados do item (b), $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$, a equação de Lagrange na coordenada generalizada ϕ resulta

$$\boxed{\ddot{\phi}\ sen^2\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\ sen\theta\cos\theta = 0} \tag{12}$$

Inicia-se, agora, a montagem da equação de Lagrange na coordenada generalizada θ . A quantidade de movimento angular generalizada é

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \tag{13}$$

e a derivada temporal da quantidade de movimento torna-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} \tag{14}$$

A seguir, determina-se a derivada parcial de T com respeito a θ ,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = mL^2\dot{\phi}^2\ sen\theta\cos\theta \tag{15}$$

e a derivada parcial de V com respeito a θ ,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgLsen\theta \tag{16}$$

Pode ser escrita a equação se Lagrange na coordenada generalizada θ ,

$$\boxed{\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 sen\theta \cos\theta + \frac{g}{L} sen\theta = 0} \tag{17}$$

(d)

A equação de Lagrange na coordenada ϕ é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} - \frac{\partial V}{\partial \phi} = Q_\phi \tag{18}$$

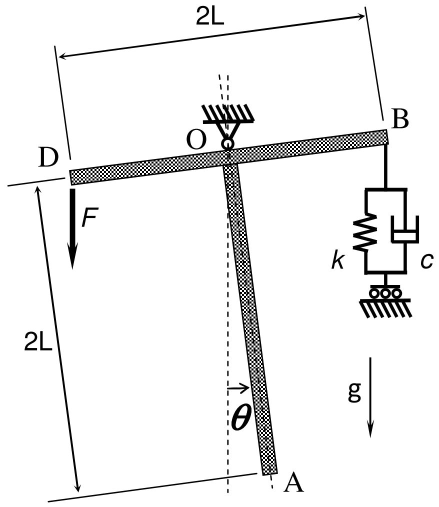
Uma vez que,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = Q_\phi = 0 \tag{19}$$

resulta,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = cte \tag{20}$$

ou seja, é invariante.



3ª Questão (3,5 pontos)

No sistema plano mostrado na figura, a peça em forma de T, articulada no ponto O, é formada por duas barras homogêneas de massa $2m$ *e comprimento 2L*. A peça está acoplada no ponto *B* a um conjunto composto por mola de rigidez k e por amortecedor viscoso linear de constante c. Este conjunto mola-amortecedor não tem restrições de movimento na horizontal e permanece na vertical para qualquer valor de θ, sem perder o contato com o solo. A mola tem deformação nula quando $\theta = 0$. Uma força vertical F(t) é aplicada ao ponto D, conforme ilustrado na figura. Usando θ como coordenada generalizada, pede-se:

(a) A equação de movimento usando o método de Lagrange

(b) Fazendo F(t) = 0, determinar a posição de equilíbrio

(c) Linearizar a equação de movimento em torno da posição de equilíbrio do item (b)

Resolução

(a) Energia cinética: $T = \frac{1}{2}(4m)\vec{V}_O.\vec{V}_O + (4m)\vec{V}_O.\left[\dot{\theta}\vec{k} \wedge (G-O)\right] + \frac{1}{2}\{\dot{\theta}\vec{k}\}^t [I_O]\{\dot{\theta}\vec{k}\}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2m4L^2}{12} + \frac{2m4L^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{5mL^2}{3}\dot{\theta}^2 \qquad (0,5)$$

Energia potencial: $V = V_{Grav} + V_{Elástica} = -2mgL\cos\theta + \frac{1}{2}k(Lsen\theta)^2$ (0,5)

Função Lagrangeana: $L = T - V = \frac{5mL^2}{3}\dot{\theta}^2 + 2mgL\cos\theta - \frac{1}{2}k(Lsen\theta)^2$

Função de dissipação de Rayleigh: $R = \frac{1}{2}c(\dot{y}_B)^2$, onde $y_B = Lsen\theta \Rightarrow R = \frac{1}{2}c(L\cos\theta\dot{\theta})^2$ (0,5)

Força generalizada: $Q_\theta = -F\frac{\partial y_D}{\partial \theta}$, onde $y_D = -Lsen\theta \Rightarrow Q_\theta = FL\cos\theta$ (0,5)

Equação de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{10}{3}mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{10}{3}mL^2\ddot{\theta} \ ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -2mgLsen\theta - kL^2 sen\theta\cos\theta \ ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = cL^2\cos^2\theta\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{10}{3}mL^2\ddot{\theta} + 2mgLsen\theta + kL^2 sen\theta\cos\theta + cL^2\cos^2\theta\dot{\theta} = FL\cos\theta} \qquad (0,5)$$

(b) Fazendo-se F(t) =0, a posição de equilíbrio é $\theta = 0$, pois o baricentro do conjunto encontra-se ao longo do segmento *OA* e a mola tem deformação nula nesta condição. O mesmo resultado seria obtido fazendo-se

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow 2mgLsen\theta + kLsen\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \text{uma solução possível é } sen\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \qquad (0,5)$$

(c) Linearizando-se diretamente, e lembrando que nas condições do item (b) F(t) = 0, tem-se:

$$\boxed{\frac{10}{3}mL^2\ddot{\theta} + 2mgL\theta + kL^2\theta + cL^2\dot{\theta} = 0} \qquad (0,5)$$

Alternativamente, pode-se escrever $a_{\theta\theta}\ddot{\theta} + b_{\theta\theta}\theta + cL^2\dot{\theta} = 0$

onde $a_{\theta\theta} = \alpha_{\theta\theta}(0)$; $T = \frac{1}{2}\alpha_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow a_{\theta\theta} = \frac{10}{3}mL^2$

e $b_{\theta\theta} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} \quad \Rightarrow b_{\theta\theta} = 2mgL\cos\theta + kL^2\cos^2\theta - kL^2 sen^2\theta\Big|_{\theta=0} \quad \Rightarrow b_{\theta\theta} = 2mgL + kL^2$

4ª Questão - Baseada no EMSC#3

(a) Energia cinética: $T = \frac{1}{2} m\vec{V}_A . \vec{V}_A + m\vec{V}_A . [\vec{\omega}_{abs} \wedge (G - A)] + \frac{1}{2} \{\vec{\omega}_{abs}\}^t [I_A] \{\vec{\omega}_{abs}\}$

onde $\vec{V}_A = \vec{0}$,

$$\vec{\omega}_{abs} = \dot{\theta}\,\vec{i} + \dot{\psi}\,\vec{K} \quad \text{e} \quad \vec{K} = -\cos\theta\,\vec{j} + sen\theta\,\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{\omega}_{abs} = \dot{\theta}\,\vec{i} - \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{j} + \dot{\psi}\,sen\theta\,\vec{k}$$

e $\quad I_A = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$, com $I = \frac{mr^2}{2}$ e $J = J_{Gz} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow J = \frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{3}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} J\dot{\psi}^2 sen^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\right)\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{3}\right)\dot{\psi}^2 sen^2\theta} \quad (1,0)$$

(b) (1,5)

Energia potencial: $V = V_{Grav} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta$

Função Lagrangeana: $L = T - V = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} J\dot{\psi}^2 sen^2\theta + mg\frac{L}{2}\cos\theta$

Forças generalizadas: $Q_\theta = M_{mola} + M_{res} = -c\dot{\theta} - k\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ e $Q_\psi = M_{ac} = M - b\frac{1}{|\dot{\psi}| + tol}$

Equação de Lagrange:

<u>Coordenada θ</u>:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -I\dot{\psi}^2 \cos\theta\, sen\theta + J\dot{\psi}^2 \cos\theta\, sen\theta - mg\frac{L}{2} sen\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} + I\dot{\psi}^2 \cos\theta\, sen\theta - J\dot{\psi}^2 \cos\theta\, sen\theta + mg\frac{L}{2} sen\theta = -c\dot{\theta} - k\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Coordenada ψ:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I\dot{\psi}\cos^2\theta + J\dot{\psi}sen^2\theta \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = I\ddot{\psi}\cos^2\theta - 2I\dot{\psi}\cos\theta\; sen\theta\dot{\theta} + J\ddot{\psi}\; sen^2\theta + 2J\dot{\psi}\cos\theta\; sen\theta\dot{\theta}$$

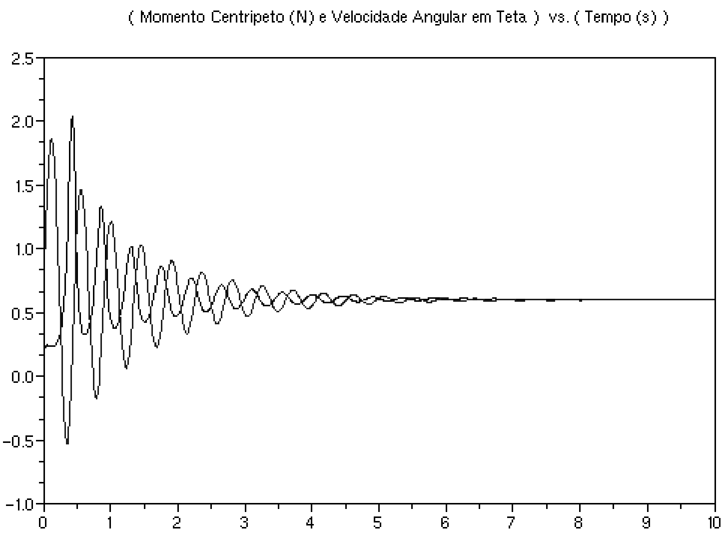
$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(I\cos^2\theta + Jsen^2\theta\right)\ddot{\psi} + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\; sen\theta\cos\theta(J - I) = M - b\frac{1}{|\dot{\psi}| + tol}}$$

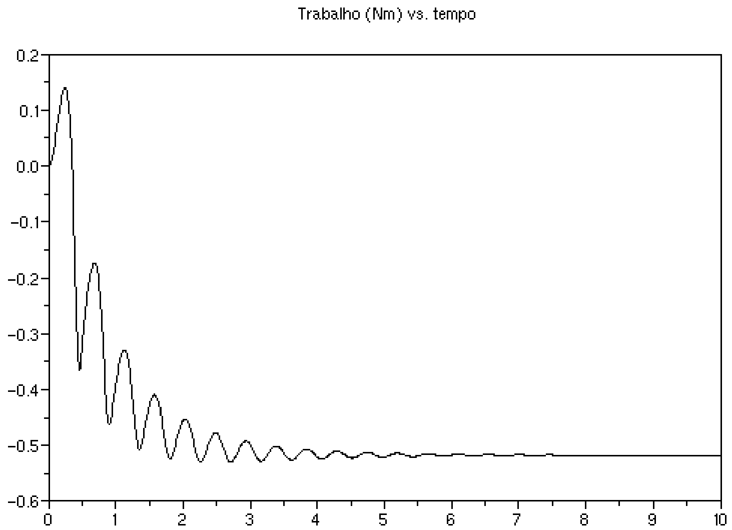
(c) (0,5)

O termo $-I\dot{\psi}^2\cos\theta\; sen\theta + J\dot{\psi}^2\cos\theta\; sen\theta$, doravante chamado Mc, na equação da coordenada generalizada θ está associado ao momento da força centrípeta. Se este momento estivesse defasado em relação à velocidade angular $\dot{\theta}$ de 180 graus, ele dissiparia energia, como faz a força de um amortecedor viscoso.

Se fizermos um gráfico do momento Mc e da velocidade angular $\dot{\theta}$ em função do tempo, conforme a figura abaixo, observaremos que há uma defasagem entre o momento e a velocidade. A amplitude de $\dot{\theta}$ foi dividida por três e um valor constante foi adicionado (*offset*) para que a defasagem pudesse ser facilmente observada.



O produto do momento Mc pela velocidade $\dot{\theta}$ é uma potência. A integral no tempo de uma potência é trabalho realizado W. Se o trabalho realizado for negativo, então o momento Mc dissipa energia, coforme observado na figura abaixo.



Como $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ param de oscilar simultaneamente, não se trata de uma transferência de energia de um movimento em θ para um movimento em ψ. Trata-se de dissipar energia associada a $\dot{\psi}$, através do termo -b/($|\dot{\psi}|$+tol), que constitui uma realimentação negativa do sinal $\dot{\psi}$. Este tipo de controle ativo e indireto (atua-se em ψ para afetar θ) através de realimentação negativa é assunto abordado na Teoria de Controle.

O gráfico apresentado representa a **coordenada generalizada θ** no tempo e a condição simulada é a **condição 5** da tabela de condições. A força peso, a força elástica e a força centrípeta definem o valor de θ no tempo elevado.

d) (0,5)

O gráfico apresentado representa a **coordenada generalizada θ** no tempo e a condição simulada é a **condição 3** da tabela de condições. Não há amortecimento viscoso, o momento centrípeto é elevado e permite que o sistema oscile em torno de um valor elevado de θ.