ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

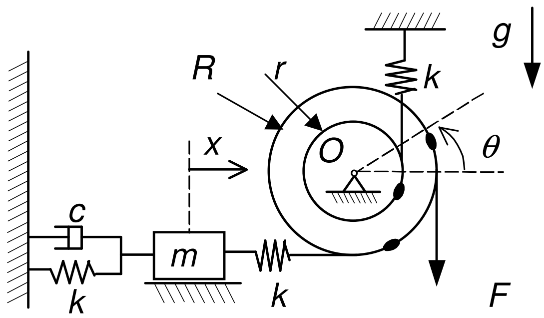
PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 22 de junho de 2010
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (1,0 ponto)
Na palestra do dia 10 de junho de 2010, a captura de movimentos por imagem foi apresentada como uma técnica útil à pesquisa experimental recente:

(a) Apresente as principais vantagens desta técnica
(b) Apresente dois exemplos de aplicação mencionados na palestra

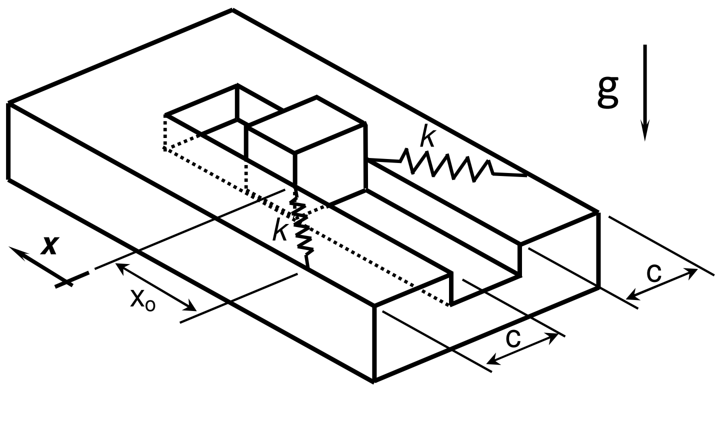
2ª Questão (3,5 pontos)
Um carretel com dois raios e momento de inércia J_{zo} está articulado em O. Um bloco de massa m está apoiado sem atrito sobre uma superfície horizontal, conforme mostrado na figura. O carretel está ligado ao bloco por uma mola de rigidez k, acoplada a uma fita enrolada no raio externo R do carretel. Outra mola de rigidez k conecta a base ao carretel por meio de uma fita enrolada na superfície de raio menor r. Ambas as fitas têm capacidade de suportar esforços de compressão. O bloco também está ligado à base por uma mola de rigidez k e um amortecedor viscoso linear de constante c. Uma força F vertical é aplicada a um fio enrolado na superfície do carretel de raio externo R. Utilizando as coordenadas generalizadas x e θ, e considerando que as molas não estão deformadas quando $x = 0$ e $\theta = 0$, determine:

a) a energia cinética **T** do sistema;
b) a energia potencial **V** do sistema;
c) a função dissipativa **R** do sistema;
d) a força generalizada Q_θ, associada a F;
e) escreva as equações de movimento pelo método de *Lagrange* para as coordenadas x e θ.

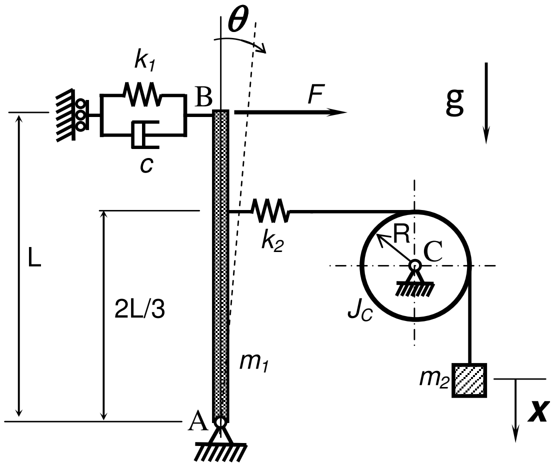


3ª Questão (3,5 pontos)
O bloco de massa m pode deslizar sem atrito ao longo da canaleta da figura, sujeito às solicitações impostas por duas molas de rigidez k. As molas têm deformação nula quando $x = 0$. Usando x como coordenada generalizada, determine:

(a) A equação de movimento usando o método de Lagrange
(b) A equação de movimento linearizada em torno da posição de equilíbrio $x = 0$.



4ª Questão (3,0 pontos) **- Baseada no EMSC#3**



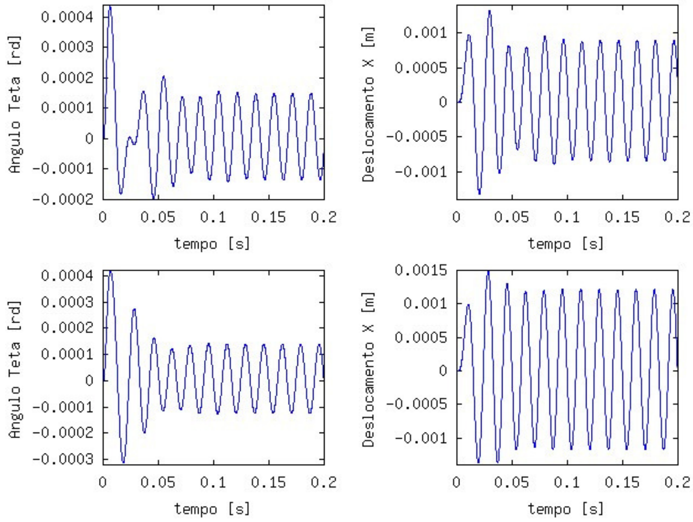
Considere o sistema composto pela barra AB de massa m_1= 100 kg e comprimento L = 2 m; pela polia de raio R = 0,2 m e momento de inércia J_C = 10 kgm^2 em relação ao eixo perpendicular à mesma, passando pelo centro C; pela massa m_2 = 50 kg; pelas molas com rigidez k_1 = 2,13 x 10^7 N/m e k_2, que têm deformação nula quando θ = 0 e x = 0 e pelo amortecedor viscoso linear de constante c = 54000 Ns/m. A mola com rigidez k_1 e o amortecedor estão montados sem restrições de movimento na vertical, de forma que o conjunto permanece na horizontal para qualquer valor de θ. Adicionalmente, considere que o fio tem comportamento ideal e que a distância entre a barra AB e o centro da polia é grande o suficiente a ponto de se poder considerar que a mola com rigidez k_2 também permanece na horizontal. O sistema é solicitado pela força $F = Asen(2\pi f_o t)$, horizontal, aplicada ao ponto B. Pede-se:

a) Calcular a energia cinética do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.

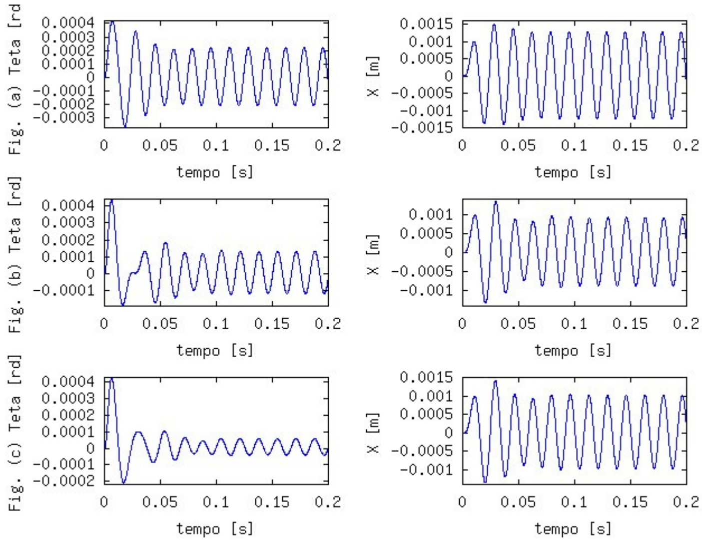
b) Calcular a energia potencial do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.

c) Determinar as forças generalizadas associadas às coordenadas θ e x.

d) Na figura ao lado há dois conjuntos de gráficos de deslocamentos generalizados. O conjunto superior foi obtido quando k_2 é menor que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa. O conjunto inferior foi obtido quando k_2 é maior que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa. O que pode ser afirmado a respeito da fase do deslocamento x em relação ao deslocamento angular θ nestes gráficos?



e) Determine a ordem dos três conjuntos de deslocamentos da figura ao lado, utilizando o fato observado no item (d), de tal forma que os gráficos representem respostas do sistema com valores crescentes de k_2.



PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 22 de junho de 2010
RESOLUÇÃO

1ª Questão (1,0 ponto)
Na palestra do dia 10 de junho de 2010, a captura de movimentos por imagem foi apresentada como uma técnica útil à pesquisa experimental recente:

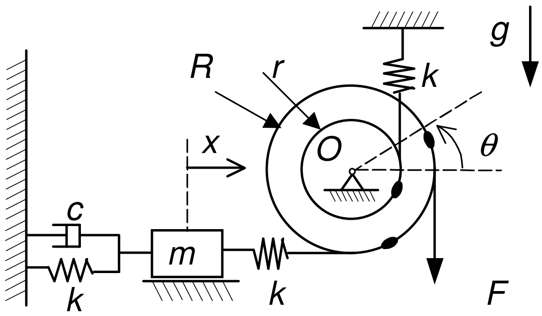
(a) Apresente as principais vantagens desta técnica
(b) Apresente dois exemplos de aplicação mencionados na palestra

(a) As principais vantagens da técnica são: (i) menor interferência da instrumentação no sistema original e (ii) maior facilidade de instalação do sistema de aquisição de dados, comparado aos sistemas instrumentados com grupos de acelerômetros
(b) Na palestra, três exemplos principais da técnica de captura de movimentos por imagem foram apresentados:
- A monitoração de um ensaio de compressão em dutos
- A monitoração de uma estrutura com três placas paralelas conectadas por molas de flexão
- A monitoração do movimento de uma corda suspensa em catenária.

2ª Questão (3,5 pontos)

Um carretel com dois raios e momento de inércia $\boldsymbol{J}_{zo}$ está articulado em $\boldsymbol{O}$. Um bloco de massa $\boldsymbol{m}$ está apoiado sem atrito sobre uma superfície horizontal, conforme mostrado na figura. O carretel está ligado ao bloco por uma mola de rigidez $\boldsymbol{k}$, acoplada a uma fita enrolada no raio externo $\boldsymbol{R}$ do carretel. Outra mola de rigidez $\boldsymbol{k}$ conecta a base ao carretel por meio de uma fita enrolada na superfície de raio menor $\boldsymbol{r}$. Ambas as fitas têm capacidade de suportar esforços de compressão. O bloco também está ligado à base por uma mola de rigidez $\boldsymbol{k}$ e um amortecedor viscoso linear de constante $\boldsymbol{c}$. Uma força $\boldsymbol{F}$ vertical é aplicada a um fio enrolado na superfície do carretel de raio externo $\boldsymbol{R}$. Utilizando as coordenadas generalizadas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{\theta}$, e considerando que as molas não estão deformadas quando $\boldsymbol{x} = 0$ e $\boldsymbol{\theta} = 0$, determine:

a) a energia cinética **T** do sistema;
b) a energia potencial **V** do sistema;
c) a função dissipativa **R** do sistema;
d) a força generalizada $\boldsymbol{Q}_\theta$, associada a $\boldsymbol{F}$;
e) escreva as equações de movimento pelo método de *Lagrange* para as coordenadas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{\theta}$.



$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_{zo} \dot{\theta}^2} \qquad \boxed{V = \frac{1}{2} k (x - x_o)^2 + \frac{1}{2} k (R\theta - x)^2 + \frac{1}{2} k (r\theta - r\theta_o)^2} \qquad \boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{2} \mathrm{c} \dot{\mathrm{x}}^2} \quad \text{(0,5 cada)}$$

$$x_o = 0 \ , \ \theta_o = 0 \ , \ x_j = R\theta \ , \ Q_\theta = -F \frac{\partial x_j}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_\theta = -FR} \qquad \text{(0,5)}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{V})}{\partial \dot{\mathrm{x}}} = \mathrm{m}\dot{\mathrm{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{V})}{\partial \dot{\mathrm{x}}} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{V})}{\partial \mathrm{x}} = -\mathrm{kx} + \mathrm{kR}\theta - \mathrm{kx} \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{\mathrm{x}}} = \mathrm{c}\dot{\mathrm{x}} \quad , \quad Q_x = F \frac{\partial x_j}{\partial x} = 0 \qquad \text{(0,5)}$$

$$\boxed{\mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} + \mathrm{c}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{k}(2\mathrm{x} - \mathrm{R}\theta) = 0} \qquad \text{(0,5)}$$

$$\frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{V})}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mathrm{MR}^2}{2} \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial(\mathrm{T} - \mathrm{V})}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mathrm{MR}^2}{2} \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \theta} = -k R^2 \theta + k R x + k r^2 \theta \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

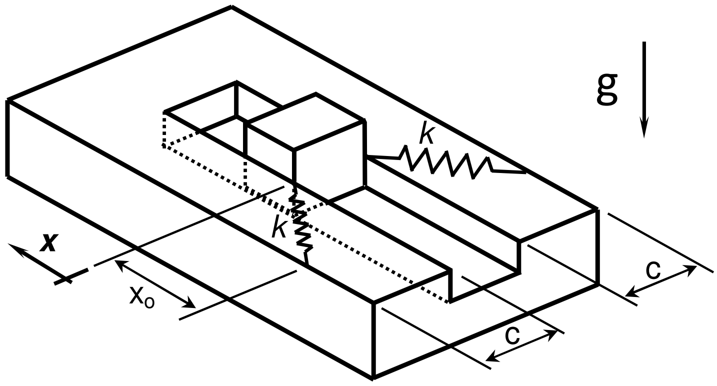
$$\boxed{J_{zo} \ddot{\theta} + k(R^2\theta - R x + r^2\theta) = -FR} \qquad \text{(0,5)}$$

3ª Questão (3,5 pontos)

O bloco de massa *m* pode deslizar sem atrito ao longo da canaleta da figura, sujeito às solicitações impostas por duas molas de rigidez *k*. As molas têm deformação nula quando $x = 0$. Usando x como coordenada generalizada, determine:

(a) A equação de movimento usando o método de Lagrange

(b) A equação de movimento linearizada em torno da posição de equilíbrio $x = 0$.



Energia cinética: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Energia potencial: $V = K(l - l_0)^2 = K\left(\sqrt{c^2 + x_0^2 + 2x_0 x + x^2} - \sqrt{c^2 + x_0^2}\right)^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T - V)}{\partial x} = -\left[K(2x_0 + 2x) - \frac{K(2x_0 + 2x)\sqrt{c^2 + x_0^2}}{\sqrt{c^2 + x_0^2 + 2x_0 x + x^2}}\right]$$

a) Equação para a coordenada x:

$$\boxed{m\ddot{x} + K(2x_0 + 2x) - \frac{K(2x_0 + 2x)\sqrt{c^2 + x_0^2}}{\sqrt{c^2 + x_0^2 + 2x_0 x + x^2}} = 0}$$

b) $T_2 = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{x=0}\right)x^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 2K - \frac{2K(c^2 + x_0^2) - 2Kx_0^2}{c^2 + x_0^2} = \frac{2Kx_0^2}{c^2 + x_0^2}$$

Equação linearizada:

$$\boxed{m\ddot{x} + \left(\frac{2Kx_0^2}{c^2 + x_0^2}\right)x = 0}$$

4ª Questão (3,0 pontos) **- Baseada no EMSC#3**

a) Calcular a energia cinética do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.

Energia cinética da massa m_2: $T_{m2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

Energia cinética de corpo rígido plano em movimento plano:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_A . \vec{V}_A + m_1 \vec{V}_A . [\vec{\omega} \wedge (G - A)] + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

$\Rightarrow$ Barra $T_{Barra} = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 L^2}{3}\right)\dot{\theta}^2$; polia $T_{Pol} = \frac{1}{2} J_C \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$

$$\boxed{\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 L^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{J_C}{R^2} + m_2\right)\dot{x}^2}$$ (0,5)

b) Calcular a energia potencial do sistema usando θ e x como coordenadas generalizadas.

Energia potencial gravitacional da massa m_2: $V = -m_2 g x$

Energia potencial gravitacional da barra: $V = -m_1 g \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$

Energia potencial elástica da mola de rigidez k_1: $V = \frac{1}{2} k_1 (L sen\theta)^2$

Energia potencial elástica da mola de rigidez k_2: $V = \frac{1}{2} k_2 \left(x - \frac{2L}{3} sen\theta\right)^2$

$$\boxed{\Rightarrow V = -m_1 g \frac{L}{2}(1 - \cos\theta) - m_2 g x + \frac{1}{2} k_1 (L sen\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(x - \frac{2L}{3} sen\theta\right)^2}$$ (0,5)

c) Determinar as forças generalizadas associadas às coordenadas θ e x.

<u>Coordenada x</u>: $\boxed{Q_x = 0}$ (0,5)

<u>Coordenada θ</u>:

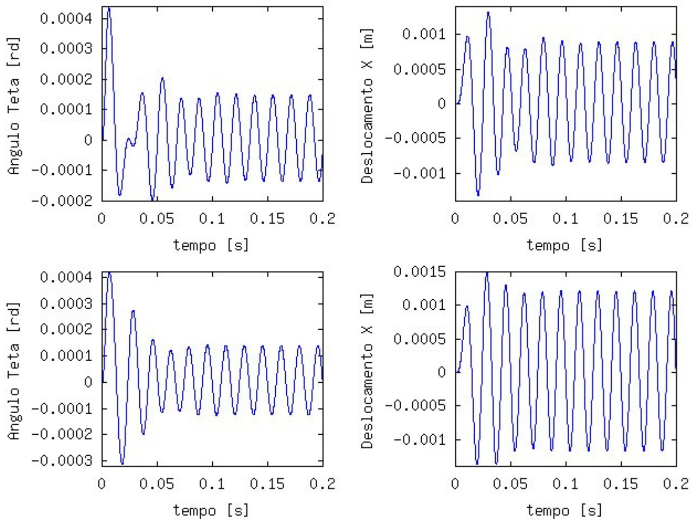
Deslocamento do ponto B: $x_B = L sen\theta$

Força generalizada devida à força F: $Q_\theta = F \frac{\partial x_B}{\partial \theta} = FL\cos\theta$

Força generalizada devida ao amortecedor $Q_\theta = -c\dot{x}_B = -cL^2 \cos^2\theta\dot{\theta}$

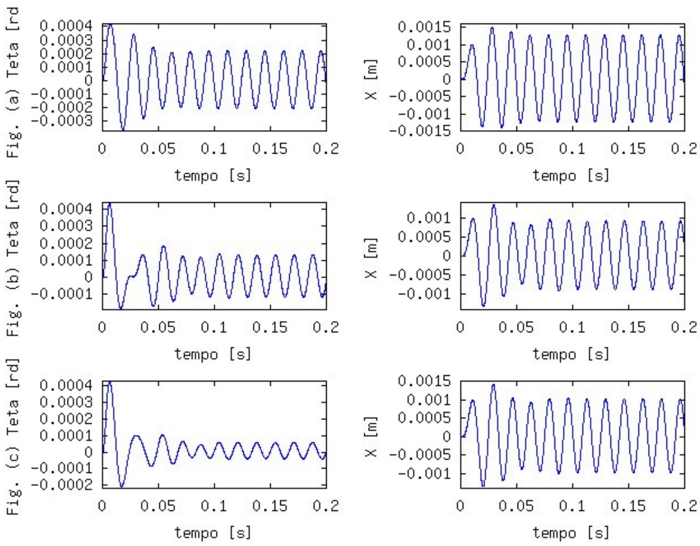
$$\boxed{\Rightarrow Q_\theta = FL\cos\theta - cL^2 \cos^2\theta\dot{\theta}}$$ (0,5)

d) Na figura ao lado há dois conjuntos de gráficos de deslocamentos generalizados. O conjunto superior foi obtido quando k_2 é menor que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa. O conjunto inferior foi obtido quando k_2 é maior que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa. O que pode ser afirmado a respeito da fase do deslocamento x em relação ao deslocamento angular θ nestes gráficos?



Para valores de k_2 menores que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa (conjunto superior), o deslocamento x está em oposição de fase com relação ao deslocamento angular θ. Para valores de k_2 maiores que o k_2 que minimiza o deslocamento em regime permanente da placa (conjunto inferior), o deslocamento x está em fase com relação ao deslocamento angular θ (0,5)

e) Determine a ordem dos três conjuntos de deslocamentos da figura ao lado, utilizando o fato observado no item (d), de tal forma que os gráficos representem respostas do sistema com valores crescentes de k_2.



Ordem dos valores crescente de k_2: Conjunto do meio (Fig. b) → conjunto inferior (Fig. c) → conjunto superior (Fig. a) (0,5)