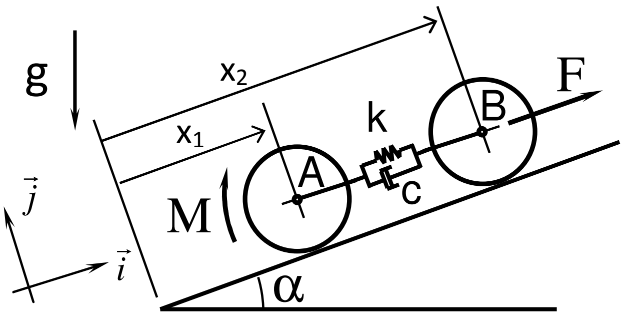
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

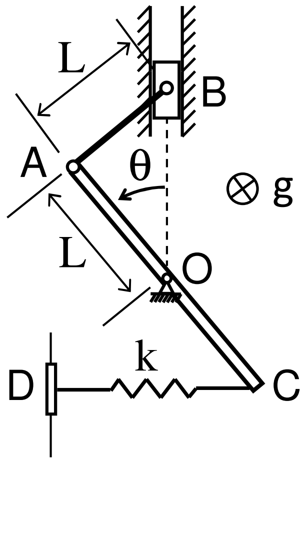
PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 23 de junho de 2009
Duração da Prova: 115 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (1,0 ponto)
Na palestra do dia 05 de junho de 2009 mostrou-se que a denominada Equação de Meshchersky, por ele deduzida em 1897-1904 e que trata consistentemente da dinâmica de uma partícula isolada que ganha ou perde massa de forma contínua, é invariante com respeito a transformações Galileanas, ou seja *satisfaz o princípio de relatividade de Galileo*. Tal equação é escrita $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}_{rel}$ (1), com $\vec{\Phi} = \dot{m}\vec{u}_{rel}$, $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula medida em relação a um referencial inercial e $\vec{u}$ é a velocidade da parcela de massa que é perdida, medida em relação ao mesmo referencial. De outro lado, a equação $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ (2), aplicada à partícula em estudo, *não satisfaz este princípio* e, portanto, não é genericamente válida. ***Limitando sua resposta a dez linhas***, responda:
(a) Do que trata o princípio mencionado?
(b) Quais são os dois casos particulares em que a equação (2) é válida?

2ª Questão (3,0 pontos)
No sistema mostrado na figura, os discos de massa m e raio R rolam sem escorregar sobre o plano inclinado e estão acoplados por meio de um amortecedor viscoso linear de constante c e por meio de uma mola de rigidez k e comprimento natural l_0. Uma força F atua no centro B do disco e um binário de momento M atua no disco de centro A. Determine, usando as coordenadas generalizadas x_1 e x_2:
(a) A energia cinética do sistema
(b) A energia potencial do sistema
(c) As equações de movimento usando o método de Lagrange

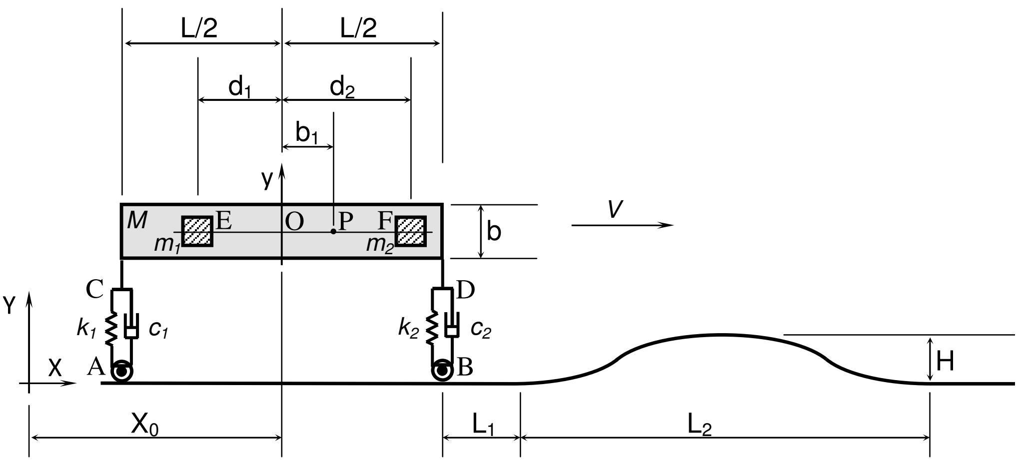


3ª Questão (3,0 pontos)
O sistema mostrado na figura se movimenta no plano horizontal e é composto pela barra AC, de comprimento $2L$ e massa m, pela barra AB, de comprimento L e massa desprezível e pelo bloco B de massa m, que se desloca sem atrito ao longo da direção BO. A mola de rigidez k está fixa à extremidade C da barra AC e a uma guia em D, de forma que o segmento CD é sempre perpendicular à direção BO. A deformação da mola é nula quando $\theta = 0$. Usando θ como coordenada generalizada, determine:
(a) A energia cinética do sistema
(b) A energia potencial do sistema
(c) A equação de movimento usando o método de Lagrange
(d) A equação de movimento linearizada em torno da posição de equilíbrio $\theta = 0$.



4ª Questão (3,0 pontos) **- Baseada no EMSC#3**

O sistema mostrado na figura representa uma simplificação de um veículo e seu sistema de suspensão. Nesta simplificação, o sistema é composto por um sólido retangular de massa M e por duas massas concentradas m_1 e m_2. O ponto P indica o local onde o condutor do veículo está posicionado. O sólido retangular está apoiado sobre dois conjuntos mola-amortecedor, cada um dos quais com valores próprios de rigidez da mola k e da constante c do amortecedor viscoso linear. As duas molas têm comprimento l_0 quando a deformação é nula. No instante mostrado na figura, o conjunto move-se sobre uma superfície horizontal, com velocidade constante $\vec{V} = V\vec{i}$.



Após percorrer uma distância L_1, o veículo tem de suplantar um obstáculo em sua trajetória. Durante a passagem pelo obstáculo, a velocidade horizontal do ponto O permanece constante $\vec{V} = V\vec{i}$. O pavimento tem altura definida por:

$$h = \begin{Bmatrix} 0 \; se \; X \le L_1 + L/2 \\ \dfrac{H}{2}\left(1 - \cos\left(\dfrac{2\pi}{L_2} X\right)\right) se \; L_1 + L/2 < X < L_1 + L_2 + L/2 \\ 0 \; se \; X \ge L_1 + L_2 + L/2 \end{Bmatrix}$$

Pede-se:

(a) Obter as expressões das forças generalizadas associadas aos amortecedores lineares do veículo a partir da função de dissipação de Rayleigh ou a partir do trabalho virtual das forças dissipativas viscosas.

(b) Considerando que o sistema seja perfeitamente simétrico (geometria, distribuição de massa e rigidez), proponha uma maneira de diminuir a frequência natural de oscilação de arfagem.

(c) Definimos neste exercício de simulaçao e modelagem um índice de desconforto: a amplitude do movimento no banco do motorista em relaçao à sua posição de equilíbrio. Com base nas simulações, descreva como varia o índice de desconforto do motorista com alterações da velocidade de avanço do veículo na faixa entre 18 e 48 m/s.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 23 de junho de 2009
RESOLUÇÃO

1ª Questão (1,0 ponto)
Na palestra do dia 05 de junho de 2009 mostrou-se que a denominada Equação de Meshchersky, por ele deduzida em 1897-1904 e que trata consistentemente da dinâmica de uma partícula isolada que ganha ou perde massa de forma contínua, é invariante com respeito a transformações Galileanas, ou seja *satisfaz o princípio de relatividade de Galileo*. Tal equação é escrita $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}_{rel}$ (1), com $\vec{\Phi} = \dot{m}\vec{u}_{rel}$, $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula medida em relação a um referencial inercial e $\vec{u}$ é a velocidade da parcela de massa que é perdida, medida em relação ao mesmo referencial. De outro lado, a equação $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ (2), aplicada à partícula em estudo, *não satisfaz este princípio* e, portanto, não é genericamente válida. ***Limitando sua resposta a dez linhas***, responda:

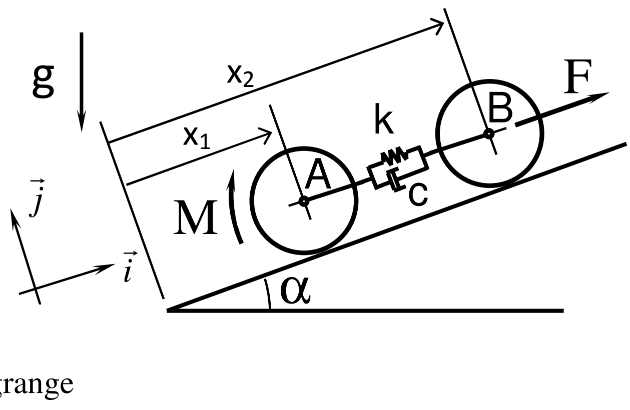
(a) Do que trata o princípio mencionado?
(b) Quais são os dois casos particulares em que a equação (2) é válida?

Resolução:
(a) O *princípio de relatividade de Galileo* afirma que as leis fundamentais da física são as mesmas em todos referenciais inerciais. No caso em análise, considerando-se dois referenciais inerciais, pode-se definir: (i) $\vec{v}$ como a velocidade da partícula medida em relação a um dos referenciais, como acima, e (ii) $\vec{v}'$ como a velocidade da partícula medida em relação ao outro. Neste caso:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}_{rel} \quad \text{e} \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}') - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}'_{rel}$$

(b) Os dois casos particulares em que a equação (2) é válida são $\dot{m} = 0$ e $\vec{u} = 0$

2ª Questão (3,0 pontos)
No sistema mostrado na figura, os discos de massa m e raio R rolam sem escorregar sobre o plano inclinado e estão acoplados por meio de um amortecedor viscoso linear de constante c e por meio de uma mola de rigidez k e comprimento natural l_0. Uma força F atua no centro B do disco e um binário de momento M atua no disco de centro A. Determine, usando as coordenadas generalizadas x_1 e x_2:



(a) A energia cinética do sistema
(b) A energia potencial do sistema
(c) As equações de movimento usando o método de Lagrange

(a) $T = T_A + T_B = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J_{A,z}\frac{\dot{x}_1^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_{B,z}\frac{\dot{x}_2^2}{R^2}$, onde $J_{A,z} = J_{B,z} = \frac{mR^2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{4}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)} \qquad (0,5)$$

(b) $V = V_{El} + V_{Grav}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_o)^2 + mgsen\alpha(x_1 + x_2)} \qquad (0{,}5)$$

(c) $R = \frac{1}{2}c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$ (0,5)

Forças generalizadas: $\delta W = M\delta\theta_A + F\delta x_2$, onde $\theta_A = \frac{x_1}{R}$ define a rotação do disco com centro A

$$Q_{x_1} = M\frac{\partial\theta_A}{\partial x_1} + F\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{M}{R}, \qquad Q_{x_2} = M\frac{\partial\theta_A}{\partial x_2} + F\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = F \qquad (0{,}5)$$

Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \text{ com } q_1 = x_1 \text{ e } q_2 = x_2$$

Para x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{3}{2}m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(-k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\alpha) \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\alpha - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \frac{M}{R}} \qquad (0{,}5)$$

Para x_2:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2}m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_2$$

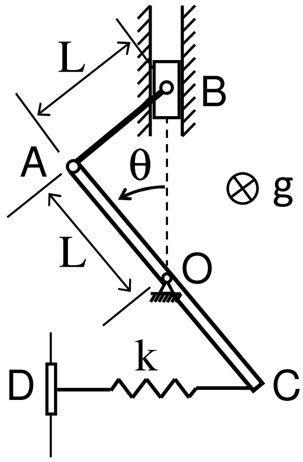
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\alpha) \qquad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2} = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1 - l_o) + mgsen\alpha + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F} \qquad (0{,}5)$$

3ª Questão (3,0 pontos)

O sistema mostrado na figura se movimenta no plano horizontal e é composto pela barra AC, de comprimento *2L* e massa *m*, pela barra AB, de comprimento *L* e massa desprezível e pelo bloco B de massa *m*, que se desloca sem atrito ao longo da direção BO. A mola de rigidez *k* está fixa à extremidade C da barra AC e a uma guia em D, de forma que o segmento CD é sempre perpendicular à direção BO. A deformação da mola é nula quando $\theta = 0$. Usando θ como coordenada generalizada, determine:

(a) A energia cinética do sistema
(b) A energia potencial do sistema
(c) A equação de movimento usando o método de Lagrange
(d) A equação de movimento linearizada em torno da posição de equilíbrio $\theta = 0$.



(a) $T = T_{Barra} + T_B = \frac{1}{2} J_{O,z}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}_B^2$, onde

$$J_{O,z} = \frac{m(2L)^2}{12} \qquad \text{e} \qquad y_B = 2L\cos\theta \Rightarrow \dot{y}_B = -2L\dot{\theta}sen\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mL^2\dot{\theta}^2}{6} + 2mL^2\dot{\theta}^2 sen^2\theta} \quad \text{ou} \quad \boxed{T = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3} + 4mL^2 sen^2\theta\right)\dot{\theta}^2} \qquad (1,0)$$

(b) $V = V_{El}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}k(Lsen\theta)^2} \qquad (0,5)$$

(c) $R = 0$, Forças generalizadas: $\delta W = 0 \quad \Rightarrow Q_\theta = 0$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \text{, com } q_1 = \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{mL^2}{3} + 4mL^2 sen^2\theta\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + 4mL^2 sen^2\theta\ddot{\theta} + 8mL^2 sen\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 4mL^2 sen\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - kL^2 sen\theta\cos\theta$$

$$\boxed{\left(\frac{mL^2}{3} + 4mL^2 sen^2\theta\right)\ddot{\theta} + 4mL^2 sen\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + kL^2 sen\theta\cos\theta = 0} \qquad (1,0)$$

(d) $T = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3} + 4mL^2 sen^2\theta\right)\dot{\theta}^2$ ou $T = \frac{1}{2}\alpha_{\theta\theta}\dot{\theta}^2$

Equação linearizada neste caso:

$a_{\theta\theta}\ddot{\theta} + b_{\theta\theta}\theta = 0$, onde $a_{\theta\theta} = \alpha_{\theta\theta}(0) = \frac{mL^2}{3}$ e $b_{\theta\theta} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = kL^2$

$$\boxed{\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + kL^2\theta = 0}$$ (0,5)

4ª Questão (3,0 pontos) **- Baseada no EMSC#3**

(a) Obter as expressões das forças generalizadas associadas aos amortecedores lineares do veículo a partir da função de dissipação de Rayleigh ou a partir do trabalho virtual das forças dissipativas viscosas.
(b) Considerando que o sistema seja perfeitamente simétrico (geometria, distribuição de massa e rigidez), proponha uma maneira de diminuir a frequência natural de oscilação de arfagem.
(c) Definimos neste exercício de simulaçao e modelagem um índice de desconforto: a amplitude do movimento no banco do motorista em relaçao à sua posição de equilíbrio. Com base nas simulações, descreva como varia o índice de desconforto do motorista com alterações da velocidade de avanço do veículo na faixa entre 18 e 48 m/s.

(a) Definindo λ_1 como sendo o comprimento da mola na parte traseira do veículo e λ_2 como sendo o comprimento da mola na parte dianteira do veículo, tem-se que:

$$\lambda_1 = l_o + Y_O - \frac{L}{2}sen\alpha - \rho_1\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right)\right] \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = l_o + Y_O + \frac{L}{2}sen\alpha - \rho_2\left[\frac{H}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right)\right]$$

onde

$$\rho_1 = \begin{cases} 0 \; se \; Vt \le L_1 \\ 1 \; se \; L_1 < Vt < L_2 + L_1 \\ 0 \; se \; Vt \ge L_2 + L_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \begin{cases} 0 \; se \; Vt \le L_1 + L \\ 1 \; se \; L_1 + L < Vt < L_2 + L_1 + L \\ 0 \; se \; Vt \ge L_2 + L_1 + L \end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2}c_1(\dot{\lambda}_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{\lambda}_2)^2$$

Coordenada Y_o: (0,5)

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial \dot{Y}_O} = c_1\left(\dot{Y}_O - \frac{L}{2}\cos\alpha\dot{\alpha} - \rho_1\frac{HV\pi}{L_2}sen\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right) + c_2\left(\dot{Y}_O + \frac{L}{2}\cos\alpha\dot{\alpha} - \rho_2\frac{HV\pi}{L_2}sen\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right)}$$

Coordenada α: (0,5)

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} = -c_1 \frac{L}{2}\cos\alpha\left(\dot{Y}_O - \frac{L}{2}\cos\alpha\dot{\alpha} - \rho_1 \frac{HV\pi}{L_2} sen\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right) + c_2 \frac{L}{2}\cos\alpha\left(\dot{Y}_O + \frac{L}{2}\cos\alpha\dot{\alpha} - \rho_2 \frac{HV\pi}{L_2} sen\left(\frac{2\pi}{L_2}Vt\right)\right)}$$

(b) Uma maneira de diminuir a frequência natural de oscilação de arfagem nesta situação é por intermédio de um aumento do momento de inércia em relação ao eixo perpendicular à figura, passando pelo ponto O. Ou seja, por intermédio de um aumento do valor de d_1 e d_2. (1,0)

(c) Para velocidades de avanço do veículo na faixa entre 18 e 48 m/s, o índice de desconforto do motorista diminui quanto maior for o valor da velocidade. (1,0)