ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

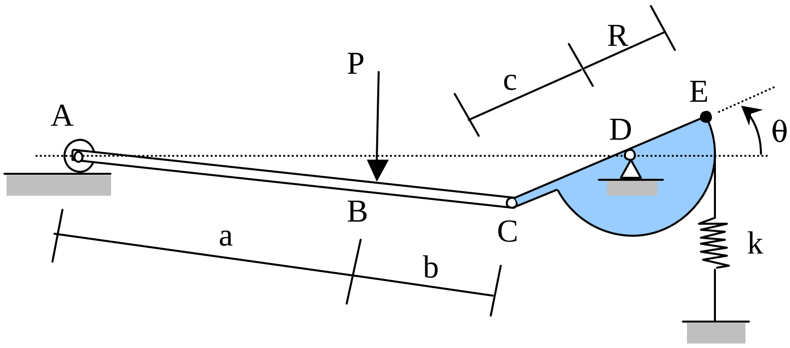
Departamento de Engenharia Mecânica

# PME 2200 – MECÂNICA B – 3ª Prova – 26 de junho de 2007

**Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

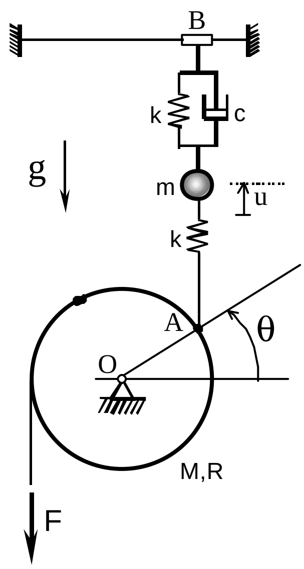
## 1ª Questão (3,0 pontos)

A carga vertical $P$ é aplicada ao mecanismo em B, conforme mostrado na figura. Desprezando o peso do mecanismo; sendo $k$ a constante elástica da mola e sabendo que a mola está em seu comprimento livre quando o ângulo $q = 0$ (barra AC na horizontal), pede-se: determinar o ângulo $q$ de equilíbrio utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).




## 2ª Questão (3,5 pontos)

Uma força $F$ está aplicada à periferia de um disco de massa $M$ e raio $R$ por meio de um fio inextensível, como mostrado na figura. O ponto A da periferia desse disco está preso a uma mola de constante elástica $k$. A outra extremidade dessa mola está presa a uma massa concentrada $m$ que, por sua vez, está igualmente presa a uma outra mola de constante elástica $k$ e a um amortecedor viscoso linear de constante $c$. O conjunto composto pelas molas, pela massa $m$ e pelo amortecedor está preso ao ponto B, que tem liberdade para se deslocar na horizontal, de forma que esse conjunto permanece na vertical. Sabendo que as molas não estão estendidas quanto $q = 0$ e $u = 0$, determine as equações de movimento para as coordenadas $u$ e $q$, seguindo a metodologia de Lagrange.



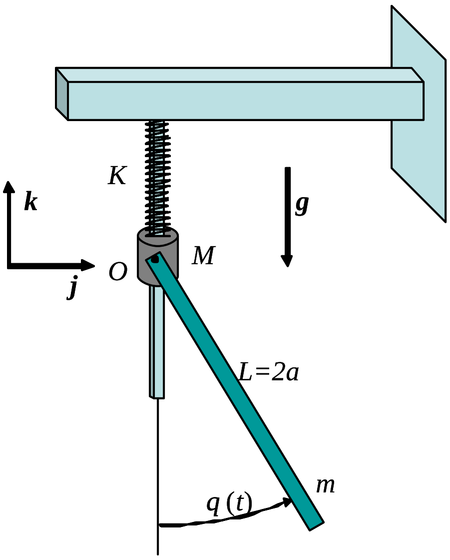
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão** (3,5 pontos)

O EP2 solicitou a modelagem e a análise da dinâmica do sistema abaixo, via simulação realizada em ambiente SCICOS/SCILAB. **A presente questão aborda apenas a parte B do estudo, referente ao pêndulo em oscilação forçada, quando é imposta uma aceleração vertical harmônica ao bloco**.




Sabe-se que as equações que regem o movimento do sistema são:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z}+(ma\,\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{\theta}+ma\dot{\theta}^2\cos\theta+Kz=0\\(ma\,\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{z}+\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}+mga\,\mathrm{sen}\,\theta=0\end{cases}\quad . \qquad (1)$$

***Considerando conhecido o movimento da peça cilíndrica***, a dinâmica fica restrita a uma única equação de movimento, na variável $\theta(t)$. Impondo $z(t)=z_0\cos\omega t$ esta equação toma a forma da Eq. (2) abaixo:

$$\ddot{\theta}+\Omega_2^2\left(1-\frac{\omega^2 z_0}{g}\cos\omega t\right)\mathrm{sen}\,\theta=0;\quad \Omega_2=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} \qquad (2)$$

Quando o deslocamento $\theta(t)$ é pequeno, a versão linearizada desta equação é conhecida como Equação de Mathieu não-amortecida, a qual é usualmente encontrada na literatura técnica na seguinte forma adimensional:

$$\ddot{\theta}+(\delta-2\varepsilon\cos 2\tau)\theta=0$$

$$\text{com}: 2\tau=\omega t;\ \delta=\left(\frac{2\Omega_2}{\omega}\right)^2;\ \varepsilon=2\frac{\Omega_2^2 z_0}{g} \qquad (3)$$

**Parâmetros do sistema:** $g=10\mathrm{m/s^2}$ ; $M=m=2\mathrm{kg}$ ; $a=0{,}75\mathrm{m}$ .

Pede-se:

(a) ***Construa*** um diagrama de simulação, em linguagem SCICOS, representando apenas a Eq. (2). ***Inclua*** no diagrama um termo dissipativo, $3B\dot{\theta}/4ma^2$ , conforme solicitado no item (e) do EP2. ***Inclua*** também saídas gráficas para as variáveis cinemáticas: $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ .

Para os itens seguintes, (b) e (c), são apresentadas quatro simulações, correspondentes às condições (8) e (9) que foram solicitadas no EP2. São elas:

(8) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right)=\left(10^{-4};0\right)$; $\omega=2\Omega_2$; $z_0=0{,}05m$ ($\delta=1;\varepsilon=0.1$); sem e com amortecimento

(9) $\left(\theta(0);\dot{\theta}(0)\right)=\left(10^{-4};0\right)$; $\omega=2\Omega_2$; $z_0=0{,}25m$ ($\delta=1;\varepsilon=0.5$); sem e com amortecimento

(b) **Responda**: as simulações foram realizadas com a versão linearizada das equações? SIM ou Não. Justifique.

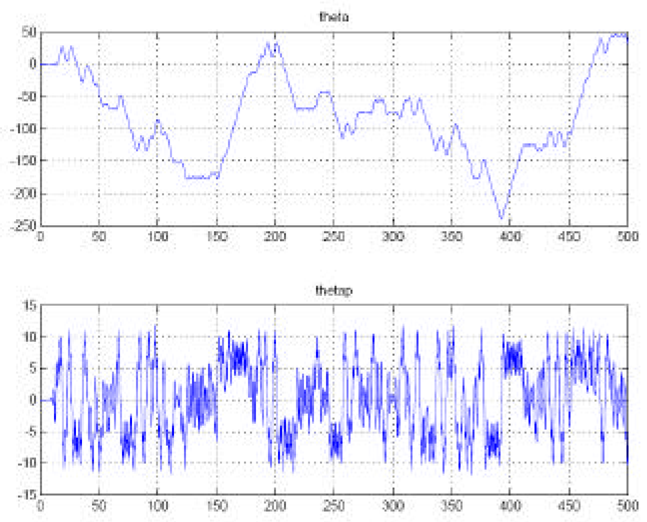
(c) ***Identifique*** as simulações (A), (B), (C) e (D) preenchendo a tabela abaixo. Marque com X a célula correspondente. ***Justifique as suas respostas.***

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

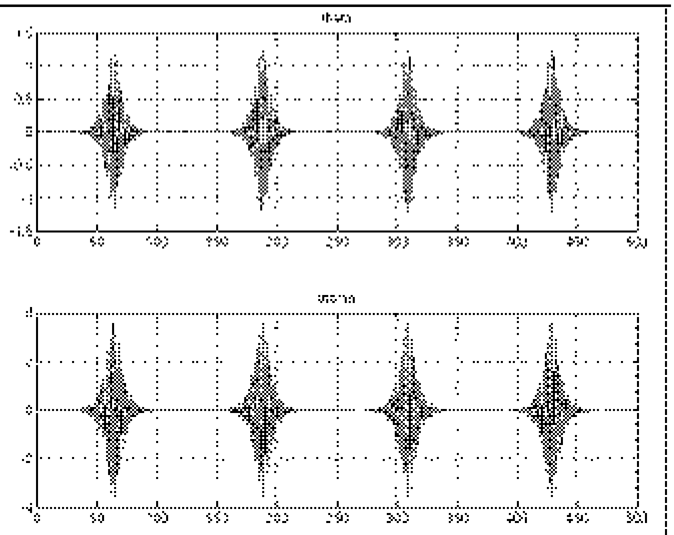
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337    Fax: (0xx11) 3813 1886

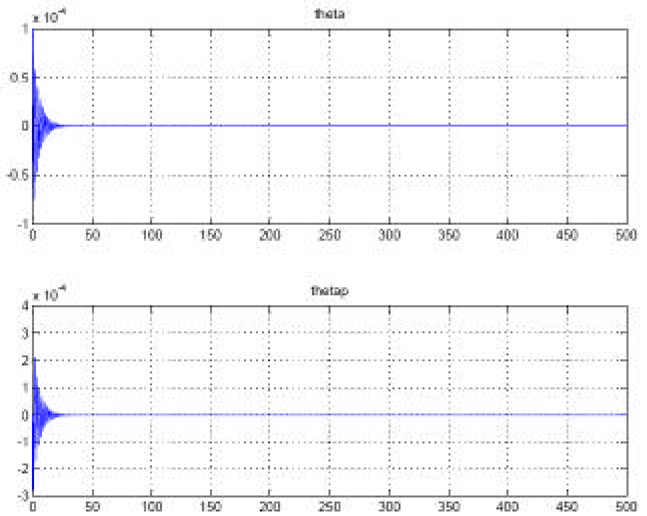
Departamento de Engenharia Mecânica

| Simulação\Condições | (8) | (9) | Sem Amortecimento | Com Amortecimento |
|---|---|---|---|---|
| (A) | | | | |
| (B) | | | | |
| (C) | | | | |
| (D) | | | | |

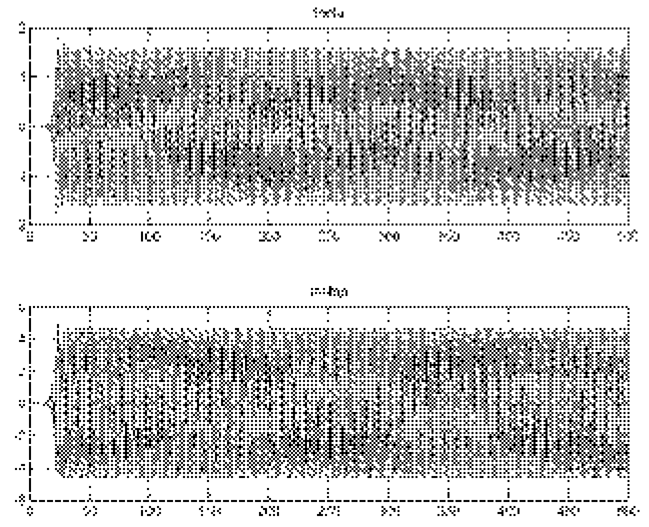


**(A)**


**(B)**



**(C)**


**(D)**

**Simulações:** $q(t)$ **e** $\dot{q}(t)$ **. Ângulo em radianos; tempo em segundos.**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

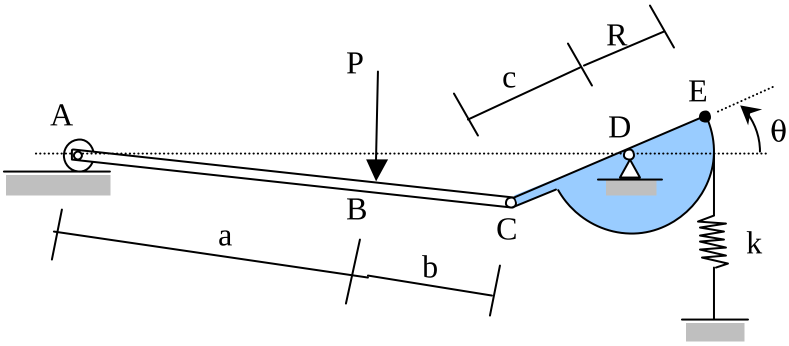
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

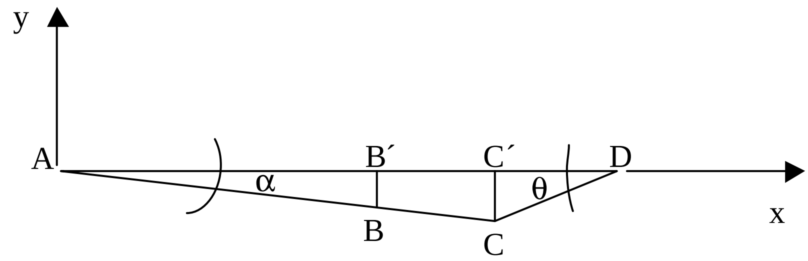
Departamento de Engenharia Mecânica

**RESOLUÇÃO**

**1ª Questão** (3,0 pontos)

A carga vertical $P$ é aplicada ao mecanismo em B, conforme mostrado na figura. Desprezando o peso do mecanismo; sendo $k$ a constante elástica da mola e sabendo que a mola está em seu comprimento livre quando o ângulo $q = 0$ (barra AC na horizontal), pede-se: determinar o ângulo $q$ de equilíbrio utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).




$$h = c \cdot \text{sen}\theta = (a+b)\cdot \text{sen}\alpha \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{c \cdot \text{sen}\theta}{(a+b)}$$ **1,0**

$$y_B = -a\text{sen}\alpha = -a \cdot \frac{c \cdot \text{sen}\theta}{(a+b)} \quad \Rightarrow \quad \delta y_B = -\frac{a\,c \cdot \cos\theta}{(a+b)}\,\delta\theta$$ **0,5**

<u>**PTV:**</u> $\delta W = 0$

$$-P \cdot dy_B - F_{mola} \cdot Rdq = 0 \quad \Rightarrow \quad -P \cdot \left(-\frac{a\,c \cdot \cos q}{(a+b)}\right) dq - kRq \cdot Rdq = 0$$ **1,0**

$$\boxed{\frac{P\,a\,c \cdot \cos q}{(a+b)} - kR^2 q = 0}$$ **0,5**

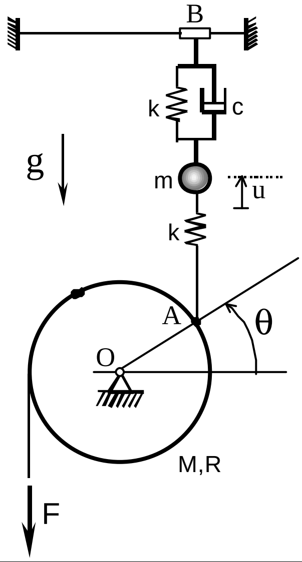
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**2ª Questão** (3,5 pontos)

Uma força $F$ está aplicada à periferia de um disco de massa $M$ e raio $R$ por meio de um fio inextensível, como mostrado na figura. O ponto A da periferia desse disco está preso a uma mola de constante elástica $k$. A outra extremidade dessa mola está presa a uma massa concentrada $m$ que, por sua vez, está igualmente presa a uma outra mola de constante elástica $k$ e a um amortecedor viscoso linear de constante $c$. O conjunto composto pelas molas, pela massa $m$ e pelo amortecedor está preso ao ponto B, que tem liberdade para se deslocar na horizontal, de forma que esse conjunto permanece na vertical. Sabendo que as molas não estão estendidas quanto $q = 0$ e $u = 0$, determine as equações de movimento para as coordenadas $u$ e $q$, seguindo a metodologia de Lagrange.




$$\text{n.g.l} = 2 \qquad q_1 = \theta \qquad q_2 = u$$

$$\boxed{\vec{v}_m = \dot{u}\,\vec{j} - \dot{\theta} R \operatorname{sen}\theta\, \vec{i}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}mR^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \dot{\theta}^2}$$ **0,5**

$$\boxed{V = mgu + \frac{1}{2}k(u - R\operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2}ku^2}$$ **1,0**

$$\boxed{R = \frac{1}{2}c\dot{u}^2}$$ **0,5**

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}mR^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \dot{\theta}^2 - mgu - \frac{1}{2}k(u - R\operatorname{sen}\theta)^2 - \frac{1}{2}ku^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta} + mR^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} + mR^2\operatorname{sen}^2\theta \cdot \ddot{\theta} + 2mR^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = mR^2\dot{q}^2 \operatorname{sen} q \cos q + kRu\cos q + kR^2\operatorname{sen} q\cos q$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = m\dot{u} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = m\ddot{u}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -mg - 2ku + kR\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = c\dot{u}$$

$$x_2 = -R\theta$$

$$F_2 = -F$$

$$Q''_\theta = F_2\frac{\partial x_2}{\partial \theta} = FR$$ **0,5**

$$Q''_u = F_2\frac{\partial x_2}{\partial u} = 0$$ **0,5**

$$\boxed{\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\operatorname{sen}^2 q\right)\ddot{q} + mR^2\dot{q}^2\cos q\operatorname{sen} q + kR\cos q(-u + R\operatorname{sen} q) = FR}$$

**0,5**

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + k(2u - R\theta) = -mg + kR\operatorname{sen}\theta}$$

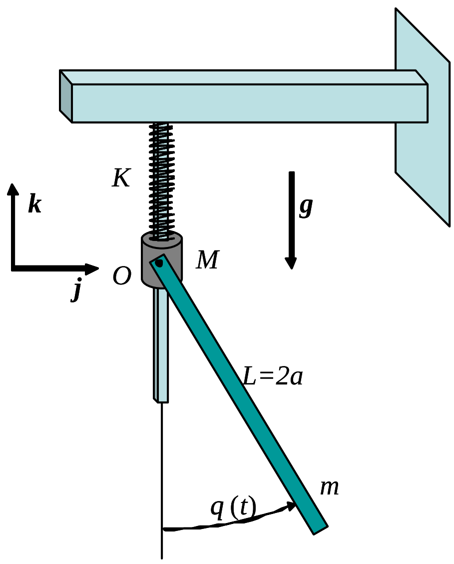
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão** (3,5 pontos)

O EP2 solicitou a modelagem e a análise da dinâmica do sistema abaixo, via simulação realizada em ambiente SCICOS/SCILAB. **A presente questão aborda apenas a parte B do estudo, referente ao pêndulo em oscilação forçada, quando é imposta uma aceleração vertical harmônica ao bloco**.




Sabe-se que as equações que regem o movimento do sistema são:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z}+(ma\,\mathrm{sen}\,q)\ddot{q}+ma\dot{q}^2\cos q+Kz=0\\(ma\,\mathrm{sen}\,q)\ddot{z}+\frac{4}{3}ma^2\ddot{q}+mga\,\mathrm{sen}\,q=0\end{cases}\quad. \qquad (1)$$

***Considerando conhecido o movimento da peça cilíndrica***, a dinâmica fica restrita a uma única equação de movimento, na variável $q(t)$. Impondo $z(t)=z_0\cos wt$ esta equação toma a forma da Eq. (2) abaixo:

$$\ddot{q}+\Omega_2^{\,2}\left(1-\frac{w^2z_0}{g}\cos wt\right)\mathrm{sen}\,q=0;\quad \Omega_2=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} \qquad (2)$$

Quando o deslocamento $q(t)$ é pequeno, a versão linearizada desta equação é conhecida como Equação de Mathieu não-amortecida, a qual é usualmente encontrada na literatura técnica na seguinte forma adimensional:

$$\ddot{q}+(d-2e\cos 2t)q=0$$
$$\text{com}: 2t=?t;\ d=\left(\frac{2\Omega_2}{w}\right)^2;\ e=2\frac{\Omega_2^{\,2}z_0}{g} \qquad (3)$$

**Parâmetros do sistema:** $g=10\,\mathrm{m/s^2}$ ; $M=m=2\,\mathrm{kg}$ ; $a=0{,}75\,\mathrm{m}$ .

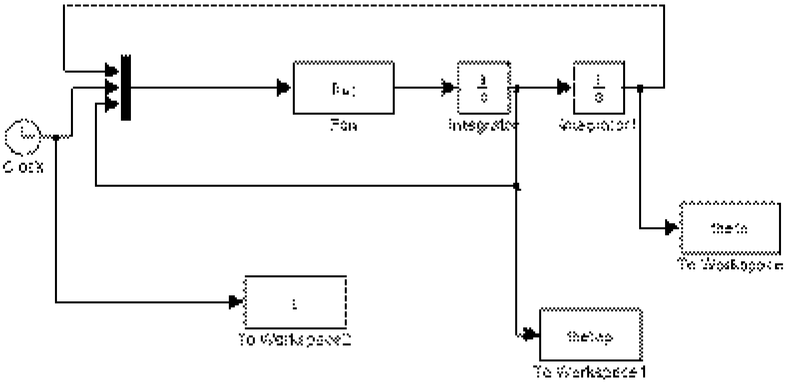
Pede-se:

(d) ***Construa*** um diagrama de simulação, em linguagem SCICOS, representando apenas a Eq. (2). ***Inclua*** no diagrama um termo dissipativo, $3B\dot{q}/4ma^2$ , conforme solicitado no EP2. ***Inclua*** também saídas gráficas para as variáveis cinemáticas: $q(t)$ e $\dot{q}(t)$ .

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



(0,5)

A função representa a equação: $\ddot{q} = -\Omega_2^2\left(1 - \frac{w^2 z_0}{g}\cos wt\right)\text{sen}q - 3B\dot{q}/4ma^2 = 0;\ \ \Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}}$. (0,5)

Para os itens seguintes, (d) e (e), são apresentadas quatro simulações, correspondentes às condições (8) e (9) que foram solicitadas no EP2. São elas:

(8) $\left(q(0);\dot{q}(0)\right) = \left(10^{-4};0\right)$; $w = 2\Omega_2$; $z_0 = 0{,}05m$ ($d = 1; e = 0.1$); sem e com amortecimento

(9) $\left(q(0);\dot{q}(0)\right) = \left(10^{-4};0\right)$; $w = 2\Omega_2$; $z_0 = 0{,}25m$ ($d = 1; e = 0.5$); sem e com amortecimento

(e) **Responda**: as simulações foram realizadas com a versão linearizada das equações? SIM ou NÃO. Justifique.

**NÃO**, as simulações não foram realizadas com a versão linearizada das equações e **sim com a versão não-linear**. Se o tivessem sido, teriam apresentado instabilidade global, seguindo a carta de estabilidade de Mathieu, particularmente na condição (9), quando da ausência de amortecimento. (0,5) (Ao contrário, o que se vê são soluções de grande amplitude, porém limitadas. Mais ainda, a simulação (A) apresenta resposta caótica à excitação harmônica e a simulação (B) uma seqüência de oscilações, provocadas pela instabilidade incipiente. Tais respostas não são produzidas por sistemas lineares. Adicionalmente, a simulação (D), sob as mesmas condições de excitação de (A), porém com amortecimento relativamente elevado, apresenta resposta periódica, de grande amplitude.)

(f) ***Identifique*** as simulações (A), (B), (C) e (D) preenchendo a tabela abaixo. Marque com X a célula correspondente. ***Justifique as suas respostas.***

| Simulação\Condições | (8) | (9) | Sem Amortecimento | Com Amortecimento |
|---|---|---|---|---|
| (A) | | X | X | |
| (B) | X | | X | |
| (C) | X | | | X |
| (D) | | X | | X |

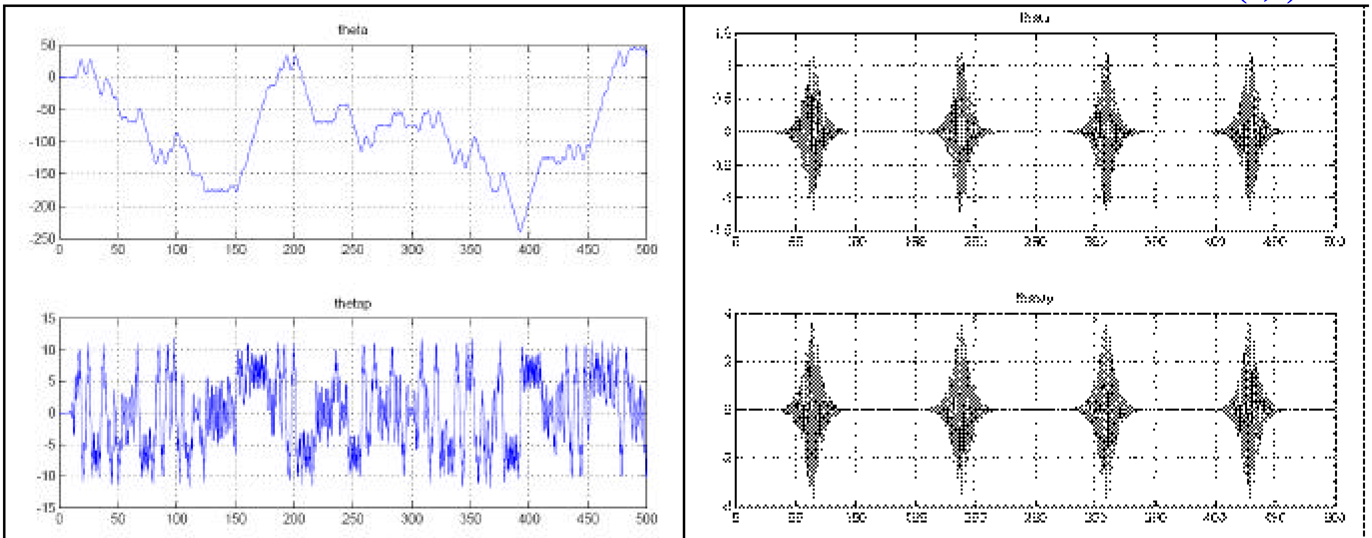
A simulação (A) corresponde à condição (9), de maior amplitude de excitação, em que $d = 2e$, e apresenta resposta caótica a uma excitação harmônica. O pêndulo apresenta oscilações de enorme amplitude, realizando voltas completas em torno da articulação. O amortecimento é nulo e a energia mecânica do sistema cresce à medida que a excitação permanece.

A simulação (B) corresponde à condição (8), em que $d = 5e$, e apresenta uma seqüência de pulsos de oscilações, provocadas pela incipiente instabilidade do ponto de equilíbrio. O amortecimento é nulo, o que permite atingir grandes amplitudes mesmo sob baixa excitação.

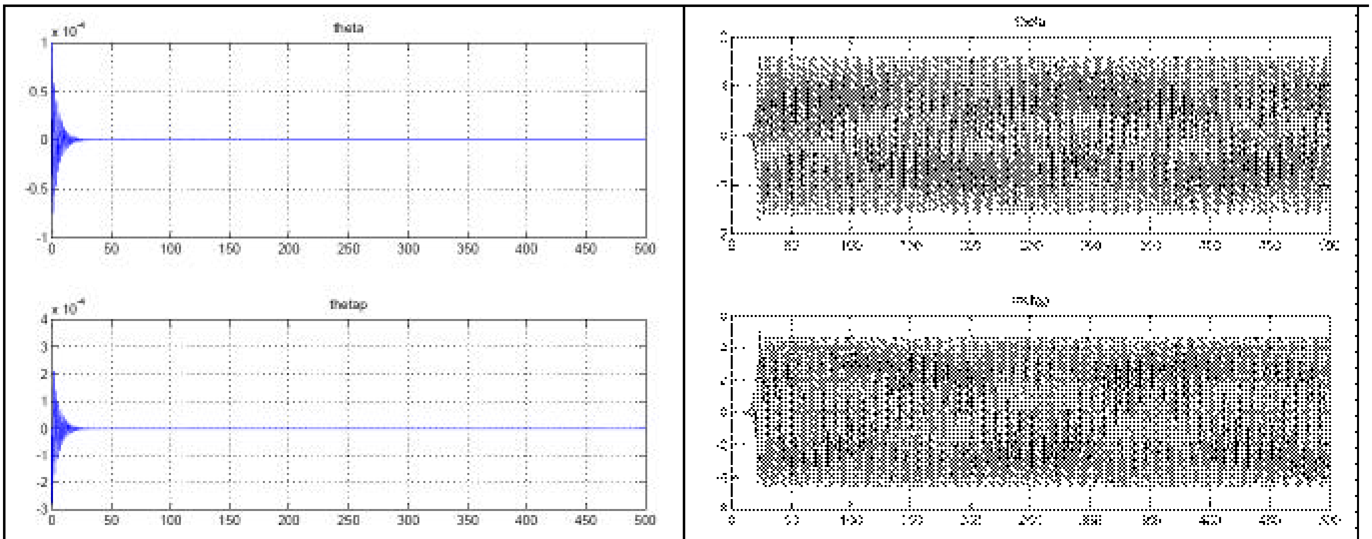
A simulação (C) também corresponde à condição (8). Porém, como o amortecimento é elevado, uma pequena excitação no segundo sub-harmônico causa uma resposta de amplitude diminuta em torno do ponto de equilíbrio que é agora estável.

A simulação (D), correspondente à condição (9), de maior amplitude de excitação, apresentando resposta periódica em torno do ponto de equilíbrio, de grande amplitude, porém limitada, cujo nível é proporcionado pela dissipação de energia devido ao termo de amortecimento.

(2,0).




**(A)** **(B)**




(C) (D)

**Simulações:** $q(t)$ **e** $\dot{q}(t)$ **. Ângulo em radianos; tempo em segundos.**