ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

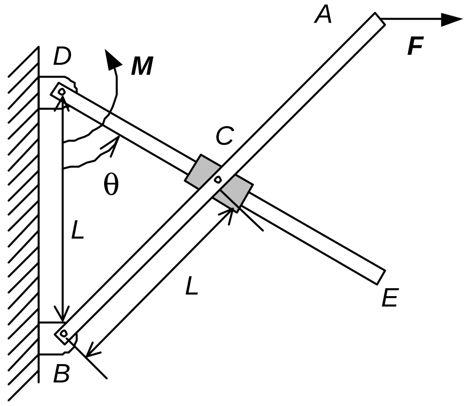
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 28 de junho de 2006

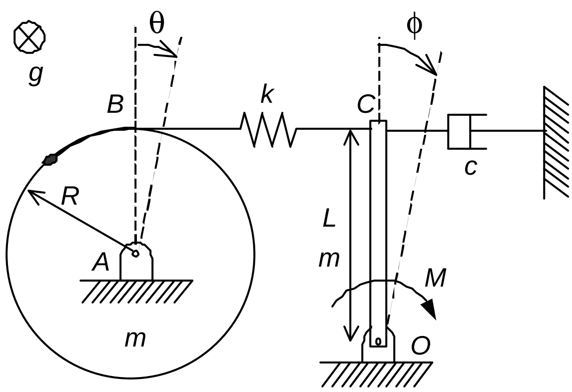
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos)



A barra ***AB*** de comprimento $2L$, do mecanismo da figura ao lado, é articulada em ***C*** na bucha que desliza sem atrito ao longo da barra ***DE***. Usando o *Princípio do Trabalho Virtual*, determine o momento ***M*** necessário para manter o mecanismo em equilíbrio quando submetido à força ***F***, perpendicular à parede e aplicada no ponto ***A***. (O mecanismo está sobre um plano horizontal sem atrito)

2ª Questão (3,0 pontos)



Um disco de massa ***m*** e raio ***R*** está articulado no ponto ***A***. A barra ***OC***, de massa ***m*** e comprimento ***L*** está articulada em ***O***. Uma mola une a periferia do disco ao ponto ***C*** da barra. A extremidade ***C*** da barra está presa a um amortecedor viscoso linear. O momento ***M*** está aplicado na barra (considere a mola sem deformação na posição da figura e ângulo f pequeno). Pede-se determinar:

a) A energia cinética do sistema
b) A energia potencial do sistema
c) A função de dissipação de *Rayleigh* do sistema
d) As equações de movimento do sistema pelo método de *Lagrange* para as coordenadas f e q.

3ª Questão (4,0 pontos) Baseada no 3º Exercício Programa.

A figura mostra um volante homogêneo de massa $M = 1{,}0\,kg$ e raio $R = 0{,}1\,m$ desbalanceado pela adição de uma massa concentrada $m = 0{,}05\,kg$ na sua periferia. Uma mola linear de constante elástica $K = 23.625\ N/m$ e um amortecedor viscoso linear de constante de amortecimento $C = 10\,Ns/m$ estão conectados ao centro O do volante, que pode se movimentar apenas na direção vertical y. O volante gira sob a ação de um torque acionador que varia em função da velocidade angular $\dot{q}$ segundo a expressão $T(\dot{q}) = T_0\left(1 - \dfrac{\dot{q}}{w_{op}}\right)$, onde T_0 é o torque de partida do motor e $w_{op} = 1800\,rpm$ é a sua velocidade de operação quando desconectado do volante.

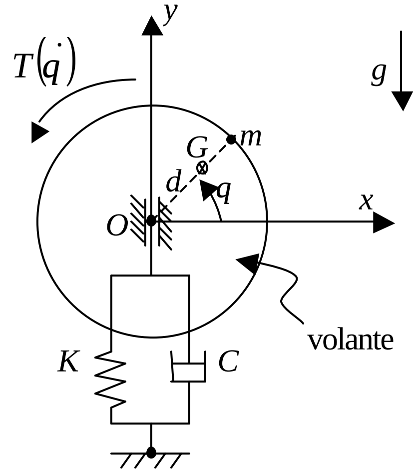
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Considere que o volante está inicialmente em repouso na posição $\boldsymbol{y} = 0$ e que $g = 9{,}81\, m/s^2$.

As equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema são:



$$\begin{cases} m_t\ddot{y} + m_t d\cos q\,\ddot{q} = -K\,y - C\,\dot{y} + m_t d\,\dot{q}^2 \sin q - m_t g \\ m_t d\cos q\;\ddot{y} + J_{Z_O}\ddot{q} = T(\dot{q}) - m_t g d\cos q \end{cases}$$

onde $J_{Z_O} = mR^2 + \dfrac{MR^2}{2}$, $d = \dfrac{mR}{M+m}$ e $m_t = M + m$

A freqüência natural do sistema composto pelo volante e pela mola é $w_{nat} = \sqrt{\dfrac{K}{m_t}} = 150{,}0\dfrac{rad}{s}$.

Pede-se:

a) De que forma as equações acima devem ser reescritas para que possam ser integradas utilizando o SCICOS? Reproduza o diagrama SCICOS empregado para integrar as equações o obter os gráficos de $\dot{q}(t)$, $y(t)$ e $T(t)$.

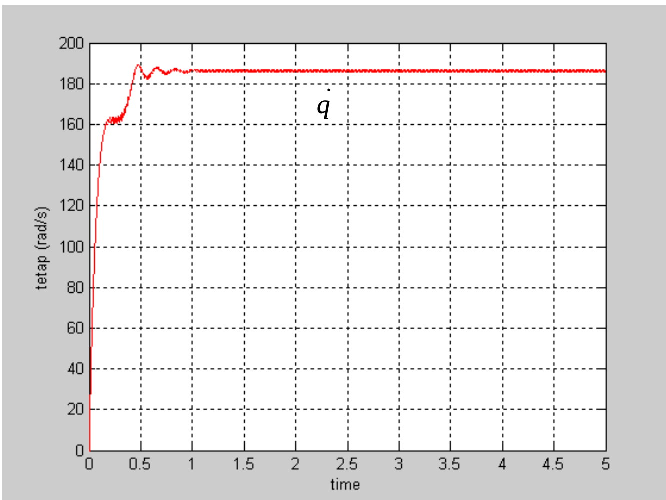


Figura 3 : $\dot{q}(t)$ correspondente a $T_0 = ?$

b) Foram feitas simulações adotando $T_0 = 14{,}0\,Nm$ e $T_0 = 6{,}0\,Nm$. Considerando o gráfico mostrado na figura 3, a qual valor de T_0 ele corresponde? Faça um gráfico mostrando o comportamento de $T(t)$ correspondente a este valor de T_0.

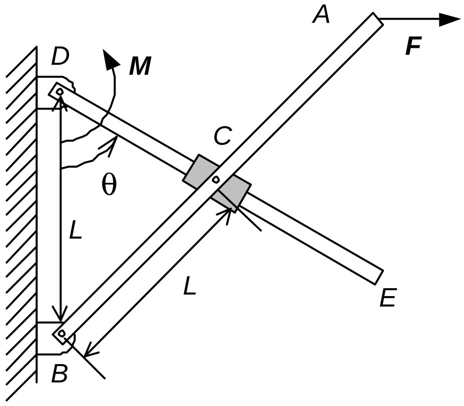
c) Faça um gráfico de $T(t)$ e um gráfico de $\dot{q}(t)$ que ilustrem a ocorrência do fenômeno denominado "sincronização de freqüência" ou "efeito de *Sommerfeld*" no sistema estudado; indique claramente o valor de T_0 e o valor de $\dot{q}$ correspondente a $t \to \infty$.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

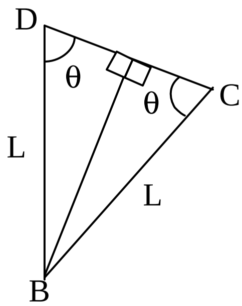
Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 1ª Questão (3,0 pontos)



A barra ***AB*** de comprimento 2***L***, do mecanismo da figura ao lado, é articulada em ***C*** na bucha que desliza sem atrito ao longo da barra ***DE***. Usando o *Princípio do Trabalho Virtual*, determine o momento ***M*** necessário para manter o mecanismo em equilíbrio quando submetido à força ***F***, perpendicular à parede e aplicada no ponto ***A***. (O mecanismo está sobre um plano horizontal sem atrito)

Resolução:



Para o triângulo isósceles DBC: $\overline{DC} = 2L\cos\theta$

$$(C-B) = 2L\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + (L - 2L\cos^2\theta)\,\vec{j}$$

$$(A-B) = 2(C-B) = 4L\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + 2(L - 2L\cos^2\theta)\,\vec{j} \qquad (1{,}0)$$

$$\delta A_x = 4L\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\delta\theta \qquad (1{,}0)$$

PTV: $\delta W = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = M\delta\theta + F\delta A_x = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{M = -4FL\left(\cos^2 q - \operatorname{sen}^2 q\right)}$ ou $\boxed{M = -4FL\cos 2q}$ (1,0)

ou alternativamente:

$$a = 180 - 2q$$

$$(C-D) = L\operatorname{sen}a\,\vec{i} + L\cos a\,\vec{j}$$

$$dA_x = 2L\cos a\,da$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

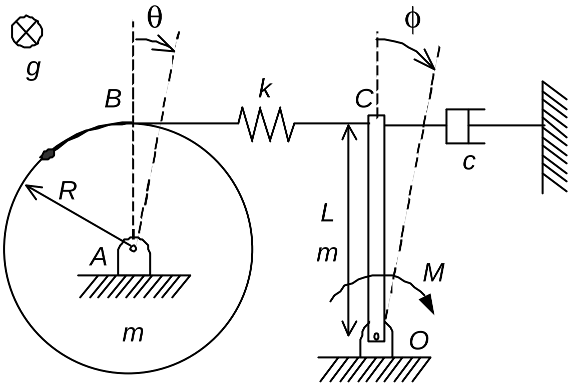
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 2ª Questão (3,0 pontos)

Um disco de massa ***m*** e raio ***R*** está articulado no ponto ***A***. A barra ***OC***, de massa ***m*** e comprimento ***L*** está articulada em ***O***. Uma mola une a periferia do disco ao ponto ***C*** da barra. A extremidade ***C*** da barra está presa a um amortecedor viscoso linear. O momento ***M*** está aplicado na barra (considere a mola sem deformação na posição da figura e ângulo f pequeno). Pede-se determinar:

a) A energia cinética do sistema
b) A energia potencial do sistema
c) A função de dissipação de *Rayleigh* do sistema
d) As equações de movimento do sistema pelo método de *Lagrange* para as coordenadas f e q.



Resolução:

Disco: $E_{disco} = \frac{1}{2} J_{Az} \dot{\theta}^2 = \frac{mR^2}{4} \dot{\theta}^2$ Barra: $E_{barra} = \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\phi}^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\phi}^2$ (0,5) + (0,5)

Sistema: $E_{sistema} = E_{disco} + E_{barra}$ ➔ $\boxed{E_{sistema} = \frac{mR^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{6} \dot{\phi}^2}$

Energia Potencial: $\boxed{V = \frac{1}{2} k (R\theta - L\phi)^2}$ (0,5)

Função dissipação de Rayleigh: $\boxed{R = \frac{1}{2} c (\dot{\phi} L)^2}$ (0,5) (0,5) (para as forças generalizadas)

Coordenada θ:

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{mR^2}{2} \ddot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial \theta} = -kR^2\theta + kRL\phi \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad ; \quad Q_\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{mR^2}{2} \ddot{\theta} + kR^2\theta - kRL\phi = 0}$$

Coordenada ϕ:

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\phi}} = \frac{mL^2}{3} \dot{\phi} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\phi} \quad ; \quad \frac{\partial(T-V)}{\partial \phi} = kRL\theta - kL^2\phi \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}} = cL^2\dot{\phi} \quad ; \quad Q_\phi = M$$

$$\boxed{\frac{mL^2}{3} \ddot{\phi} + cL^2\dot{\phi} + kL^2\phi - kRL\theta = M}$$

(0,5) (para as equações de movimento)

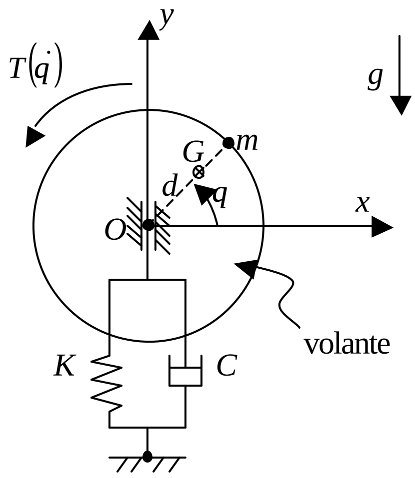
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da 3ª Questão (4,0 pontos) Baseada no 3º Exercício Programa.

A figura ao lado mostra um volante (disco) homogêneo de massa $M = 1{,}0\,\text{kg}$ e raio $R = 0{,}1\ \text{m}$ desbalanceado pela adição de uma massa concentrada $m = 0{,}05\,\text{kg}$ na sua periferia. Uma mola linear de constante elástica $K = 23.625\ \text{N/m}$ e um amortecedor viscoso linear de constante de amortecimento $C = 10\ \text{Ns/m}$ estão conectados ao centro O do volante, que pode se movimentar apenas na direção vertical y. O volante gira sob a ação de um torque acionador que varia em função da velocidade angular $\dot{q}$ segundo a expressão $T(\dot{q}) = T_0\left(1 - \dot{q}/w_{op}\right)$. T_0 é o torque de partida do motor e $w_{op} = 1800\,\text{rpm} \cong 188{,}5\,\text{rad/s}$ é a sua velocidade de operação quando desconectado do volante. Considere que o volante está inicialmente em repouso na posição y=0 e que $g = 9{,}81\text{m/s}^2$.



As equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema são:

$$\begin{cases} m_t\,\ddot{y} + m_t d\cos q\,\ddot{q} + C\,\dot{y} - m_t d\,\dot{q}^2 \sin q + K\,y = -m_t g \\ m_t d\cos q\,\ddot{y} + J_{Z_O}\ddot{q} + m_t g d\cos q = T(\dot{q}) \end{cases},$$

onde $J_{Z_O} = (m + M/2)R^2$, $d = R\left(m/(m_t)\right)$ e $m_t = M + m$. A freqüência natural amortecida do sistema composto pelo volante e pela mola é $w_{nat} = \sqrt{K/m_t} = 150{,}0\ \text{rad/s}$.

Pede-se:

a)Descreva como devem ser transformadas as equações dinâmicas acima, para que possam ser integradas utilizando o SCICOS, desta forma evitando-se erro lógico? Reproduza o diagrama SCICOS por você elaborado, para integrar as equações e obter os gráficos de $\dot{q}(t)$, $y(t)$ e $T(t)$.

Resolução

É necessário isolar as acelerações à esquerda da igualdade e desacoplar as duas equações, de modo que elas sejam escritas da forma:

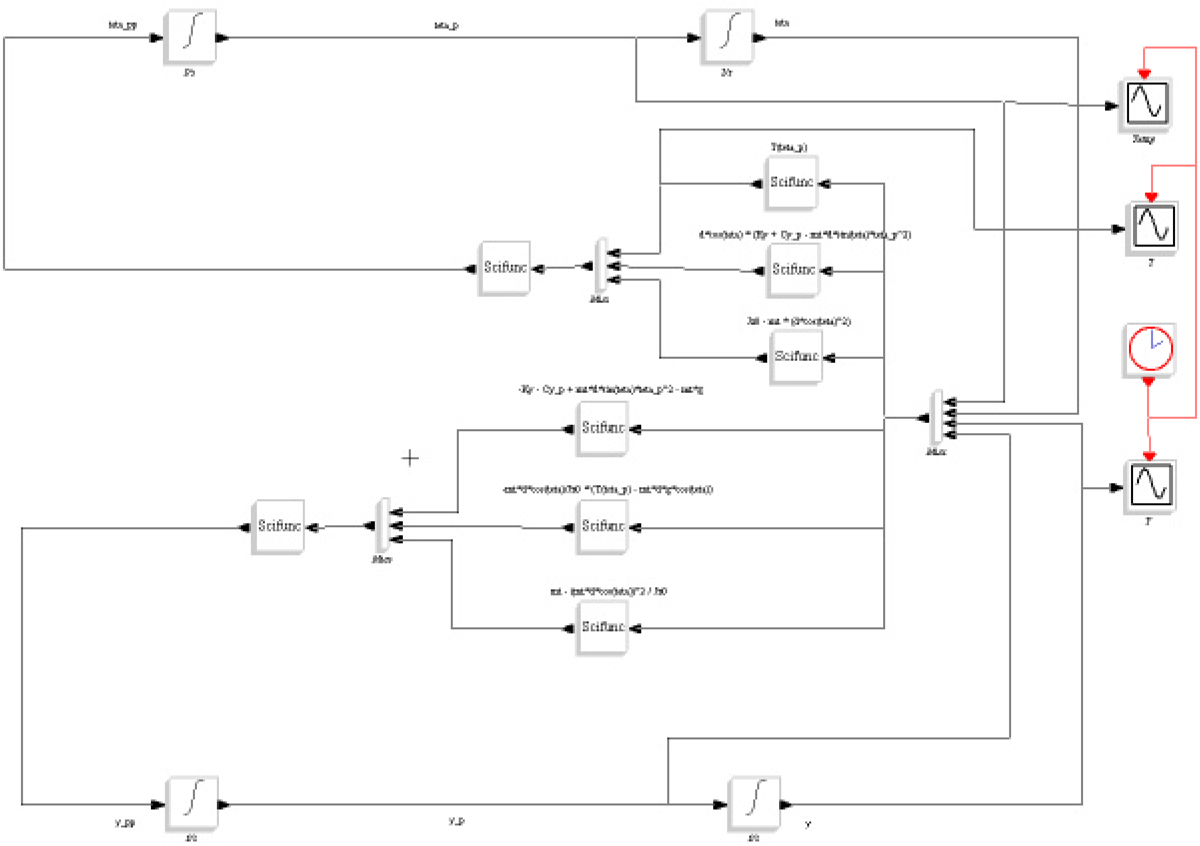
$$\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1\left(y, \dot{y}, q, \dot{q},\right) \\ f_2\left(y, \dot{y}, q, \dot{q},\right) \end{Bmatrix} \qquad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Diagrama SCICOS (1,0)



b) Foram feitas simulações adotando $T_0 = 14{,}0\,Nm$ e $T_0 = 6{,}0\,Nm$.

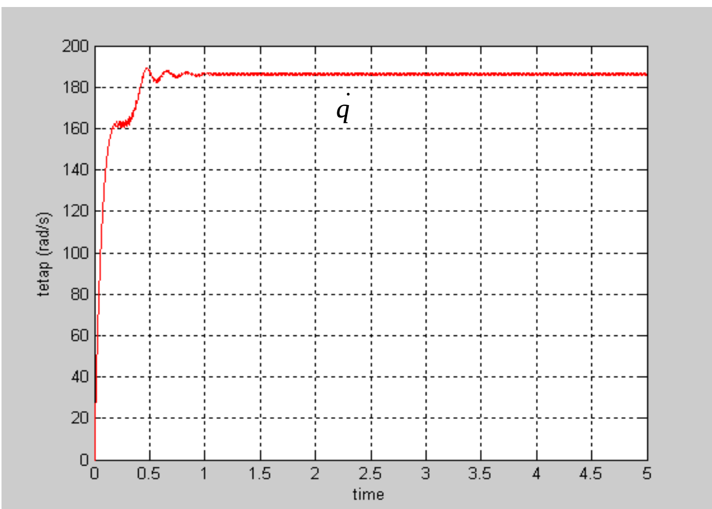


Figura 3a : $\dot{q}(t)$ correspondente a $T_0 = ?$

Considerando o gráfico mostrado na figura 3a, ao lado, a qual valor de T_0 ele corresponde? ***Justifique***. Esboce um gráfico mostrando o comportamento de $T(t)$ correspondente a este valor de T_0.

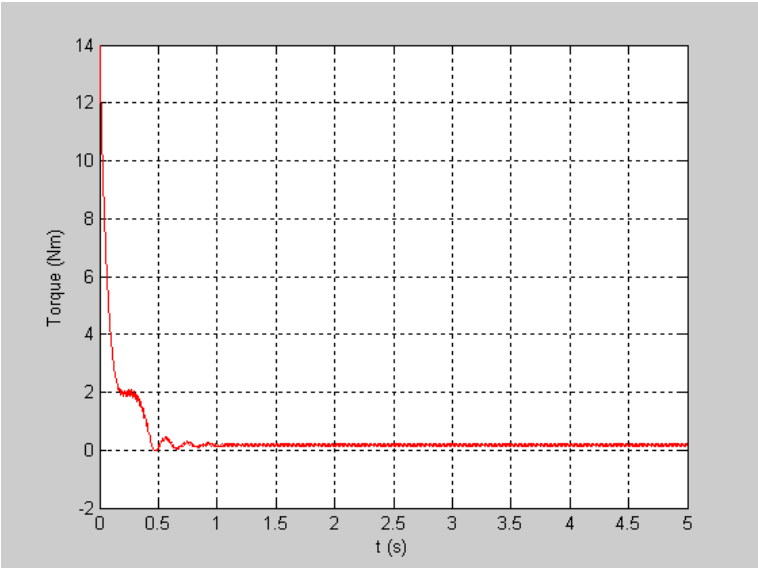
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução

O gráfico da figura 3a corresponde a $T_0 = 14{,}0\,Nm$, pois, conforme verificado através das simulações, para este valor de torque de partida o motor é capaz de atingir uma velocidade de rotação próxima a $w_{op} \approx 188.5\, rad/s$; o gráfico de $T(t)$ é mostrado abaixo. (0,5)

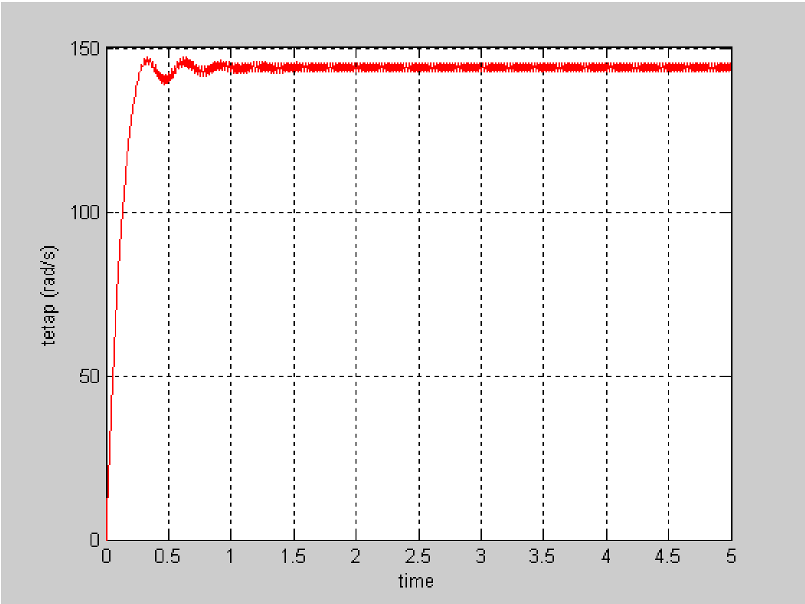


(0,5)

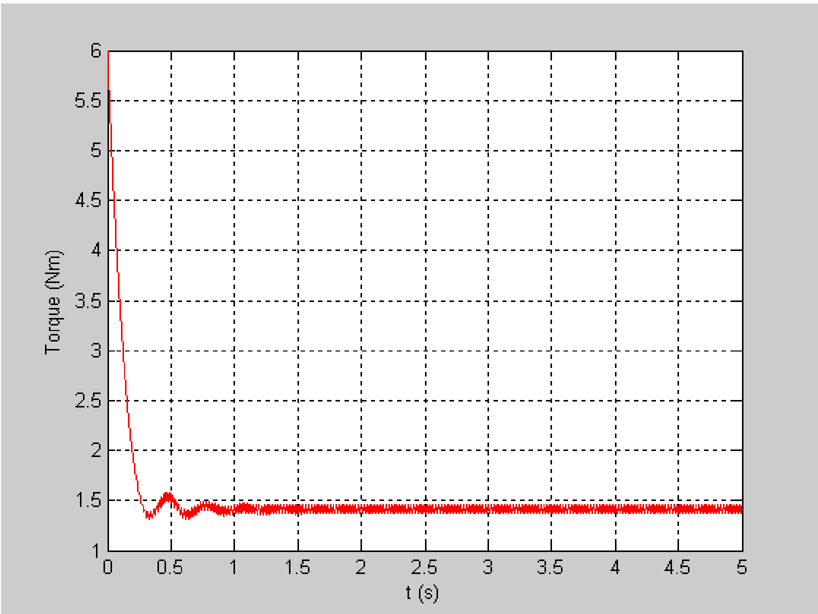
c) Esboce um gráfico de $T(t)$ e um gráfico de $\dot{q}(t)$ que ilustrem a ocorrência do fenômeno denominado "sincronização de freqüência" ou "efeito de Sommerfeld" no sistema estudado. Indique claramente o valor de T_0 e o valor de $\dot{q}$ correspondente a $t \to \infty$.

Resolução

Gráficos de $\dot{q}(t)$ e de $T(t)$ correspondentes a $T_0 = 6{,}0\,Nm$. No gráfico de $\dot{q}(t)$, vê-se que $\dot{q}_{op}$ situa-se entre 140 rad/s e 150 rad/s, ou seja, o motor não consegue imprimir uma velocidade angular superior à freqüência natural não amortecida do sistema volante-mola, mostrando que houve uma sincronização entre a freqüência de rotação do motor e esta freqüência natural. No gráfico de $T(t)$ observa-se que o torque não oscila ao redor de zero, como seria verificado para $\dot{q}_{op} \approx w_{op}$. (0,5)


150
100
50
0
tetap (rad/s)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
time

(0,5)


6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
Torque (Nm)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t (s)

(0,5)