ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

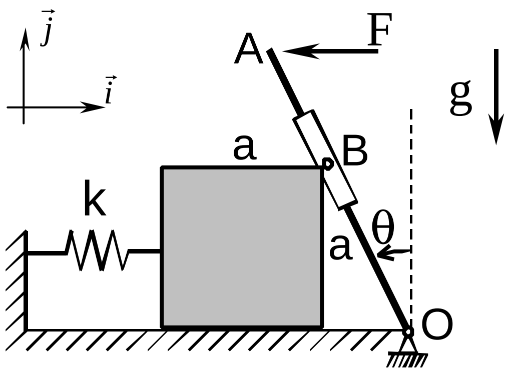
PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 28 de junho de 2005

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra OA, de comprimento L e massa desprezível, está articulada em O e pode deslizar livremente por dentro do tubo articulado no ponto B do bloco. O bloco tem massa m e pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal. Uma força $\vec{F} = -F\vec{i}$ está aplicada no ponto A, tal que, para $F = 0$, a barra OA permanece na vertical e a mola está com deformação nula; a mola tem rigidez k.

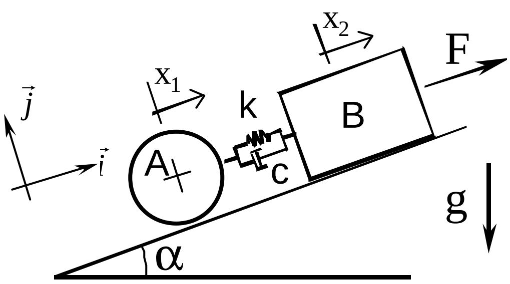
Considerando que a força $\vec{F}$ não é nula, determine, através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, a expressão que fornece os valores de F compatíveis com o equilíbrio estático do sistema.



2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, o disco de massa m e raio R rola sem escorregar sobre o plano inclinado e está acoplado a um bloco de massa m por meio de uma mola de rigidez k e um amortecedor viscoso linear de constante c. Uma força F atua no bloco, que pode deslizar sem atrito sobre o plano inclinado. Usando x_1 e x_2 como coordenadas generalizadas, determine:

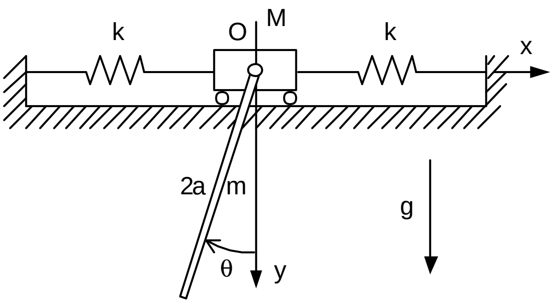
(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) As equações de movimento para as coordenada x_1 e x_2, usando o método de Lagrange.



3ª Questão (3,0 pontos)

Você obteve as seguintes equações de movimento para o sistema mecânico proposto no exercício programa (EP2):

$$(M+m)\ddot{x} - (ma\cos q)\ddot{q} + (ma\,\mathrm{sen}\,q)\dot{q}^2 + 2k\,x = 0$$
$$(-ma\cos q)\,\ddot{x} + (ma^2\,4/3)\ddot{q} + (mg\,a)\,\mathrm{sen}\,q = 0$$



a) Desenhe o diagrama de blocos que você implementou no programa de simulação numérica, para o sistema nas coordenadas generalizadas ***x***(t) e q(t).
b) Descreva o comportamento do sistema quando a rigidez da mola utilizada na simulação foi de 90.000 ***k***.
c) Esboce no mesmo gráfico temporal a posição do corpo ***x***(t) e a posição angular da barra q(t) que você obteve durante a simulação para rigidez da mola ***k***/9 e q_o = (π - 0.1) e demais condições iniciais nulas.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

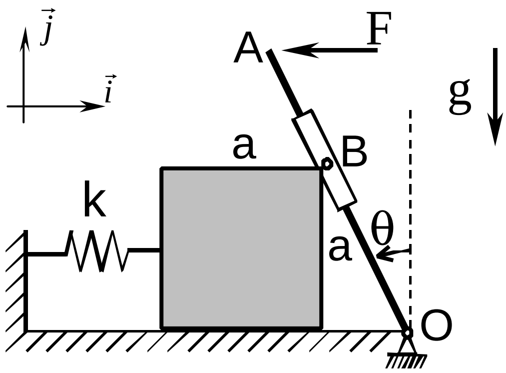
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 28 de junho de 2005

Gabarito

1ª Questão (3,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, a barra *OA*, de comprimento *L* e massa desprezível, está articulada em *O* e pode deslizar livremente por dentro do tubo articulado no ponto *B* do bloco. O bloco tem massa *m* e pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal. Uma força $\vec{F} = -F\vec{i}$ está aplicada no ponto *A*, tal que, para *F = 0*, a barra *OA* permanece na vertical e a mola está com deformação nula; a mola tem rigidez *k*.



Considerando que a força $\vec{F}$ não é nula, determine, através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, a expressão que fornece os valores de F compatíveis com o equilíbrio estático do sistema.

Resolução:

$$\vec{r}_A = l(\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{i}) \rightarrow d\vec{r}_A = -l(\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{i})d\theta; \vec{F} = -F\vec{i};$$ (1,0)

$$dW_F = Fl\cos\theta d\theta$$

$$\vec{F}_{mola} = kx\vec{i};\ x = -a\tan\theta \rightarrow dx = -\frac{a d\theta}{\cos^2\theta};$$

(1,0)

$$dW_{F_{mola}} = -ka^2\frac{\text{sen}\theta}{\cos^3\theta}d\theta;$$

$$dW = dW_{F_{mola}} + dW_F;\ dW = 0 \Rightarrow F = ka^2\frac{\text{sen}\theta}{l\cos^4\theta};$$ (1,0)

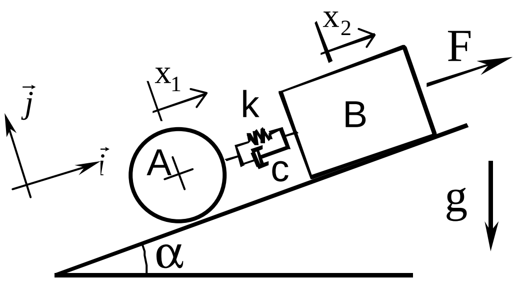
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema mostrado na figura, o disco de massa m e raio R rola sem escorregar sobre o plano inclinado e está acoplado a um bloco de massa m por meio de uma mola de rigidez k e um amortecedor viscoso linear de constante c. Uma força F atua no bloco, que pode deslizar sem atrito sobre o plano inclinado. Usando x_1 e x_2 como coordenadas generalizadas, determine:



(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) As equações de movimento para as coordenada x_1 e x_2, usando o método de Lagrange.

Resolução:

a)

$$T = T_A + T_B;$$

$$T_A = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_{A,z} \frac{\dot{x}_1^2}{R^2}; J_{A,z} = \frac{1}{2} mR^2 \Rightarrow T_A = \frac{3}{4} m\dot{x}_1^2;\ T_B = \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2; \qquad (1,0)$$

$$T = \frac{1}{2} m(\frac{3}{2}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2);$$

b)

$$V = V_{peso} + V_{mola};$$

(1,0)

$$V_{peso} = mg \operatorname{sen} a (x_1 + x_2); V_{mola} = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

c) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i;\ q_1 = x_1,\ q_2 = x_2; \qquad (0,5)$$

$$L = T - V;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{3}{2} m\dot{x}_1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{3}{2} m\ddot{x}_1;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{x}_2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} m\ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -mg \operatorname{sen} a + \frac{k}{2} 2(x_2 - x_1);\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = -mg \operatorname{sen} a - \frac{k}{2} 2(x_2 - x_1);$$

$$R = \frac{c}{2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2; \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{c}{2} 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1);\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{c}{2} 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1); \qquad (0,5)$$

$$dW_F = F dx_2 \rightarrow Q_1 = 0,\ Q_2 = F; \qquad (0,5)$$

$$\frac{3}{2} m\ddot{x}_1 + mg \operatorname{sen} a - k(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0;$$

(0,5)

$$m\ddot{x}_2 + mg \operatorname{sen} a + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F;$$

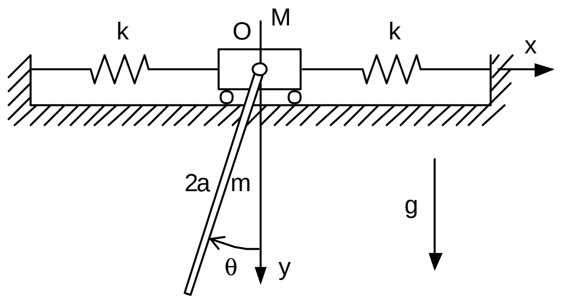
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

Você obteve as seguintes equações de movimento para o sistema mecânico proposto no exercício programa (EP2):



$$(M+m)\ddot{x} - (ma\cos q)\ddot{q} + (ma\,\mathrm{sen}\,q)\dot{q}^2 + 2k\,x = 0$$
$$(-ma\cos q)\,\ddot{x} + (ma^2\,4/3)\ddot{q} + (mg\,a)\,\mathrm{sen}\,q = 0$$

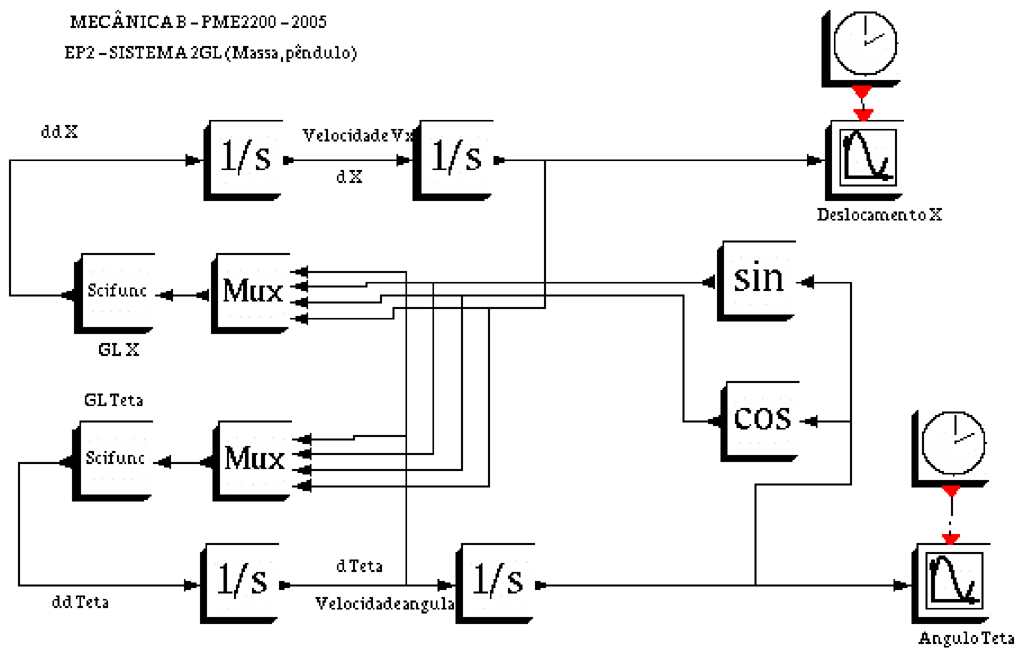
a) Desenhe o diagrama de blocos que você implementou no programa de simulação numérica, para o sistema nas coordenadas generalizadas ***x***(t) e q(t).

b) Descreva o comportamento do sistema quando a rigidez da mola utilizada na simulação foi de 90.000 ***k***.

c) Esboce no mesmo gráfico temporal a posição do corpo ***x***(t) e a posição angular da barra q(t) que você obteve durante a simulação para rigidez da mola ***k***/9 e q_o = (π - 0.1) e demais condições iniciais nulas.

Resolução:

a) Desenhe o diagrama de blocos que você implementou no programa de simulação numérica, para o sistema nas coordenadas generalizadas ***x***(t) e q(t). (1,0)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

b) Descreva o comportamento do sistema quando a rigidez da mola utilizada na simulação foi de 90.000 ***k***.

O movimento ***x***(t) do corpo fica reduzido devido à rigidez elevada da mola e o movimento da barra se comporta como um pêndulo com freqüência aproximada de 0,1 Hz. (1,0)

c) Esboce no mesmo gráfico temporal a posição do corpo ***x***(t) e a posição angular da barra q(t) que você obteve durante a simulação para rigidez da mola ***k***/9 e q_o = (π - 0.1) e demais condições iniciais nulas. Conforme a figura a posição do corpo ***x***(t) está em linha contínua e posição angular da barra q(t) em linha tracejada. (1,0)