ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

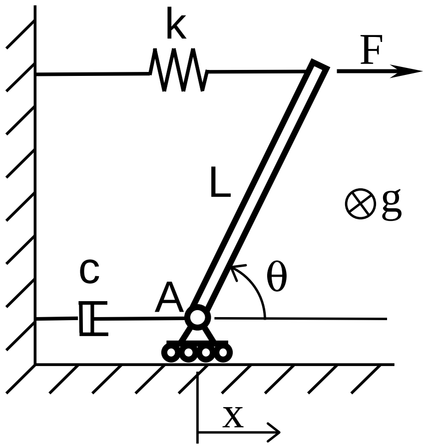
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 06 de julho de 2004

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

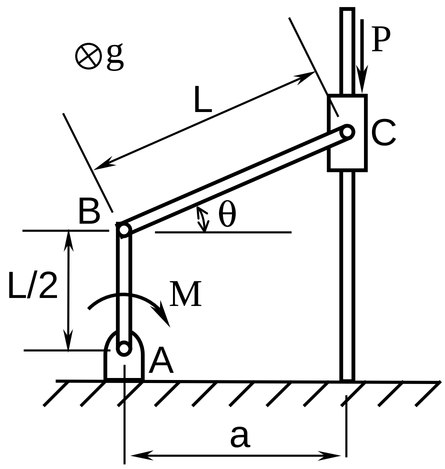
1ª Questão (4,0 pontos)



A barra de massa **m** e comprimento **L** está sob ação da força **F**, como indicado na figura. A barra está articulada no ponto A, que pode deslocar-se sem atrito na direção **x**. A mola possui rigidez **k** e o amortecedor viscoso linear possui constante **c**. Todo o sistema encontra-se apoiado em um plano horizontal. Usando **x** e **θ** como coordenadas generalizadas deste sistema, determine:

(a) A energia cinética do sistema.
(b) A energia potencial do sistema.
(c) A equação de movimento para a coordenada **x**, usando o método de Lagrange.
(d) A equação de movimento para a coordenada **θ**, usando o método de Lagrange.

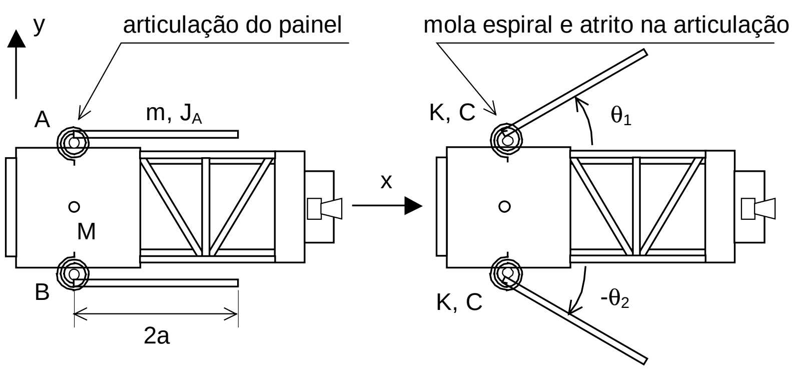
2ª Questão (3,0 pontos)



Uma força **P**, conhecida, é aplicada a um sistema, conforme mostrado na figura. Todo o sistema encontra-se apoiado em um plano horizontal e a distância **a** é constante. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determine o módulo do momento **M** que mantém o sistema em equilíbrio.

3ª Que stão (3,0 pontos)

No EP-2 foi solicitada a modelagem de um satélite com corpo de massa ***M***, possuindo dois painéis solares de comprimento 2***a*** e massa ***m*** cada, acoplados ao corpo com articulações em ***A*** e ***B***, conforme mostrado na figura. Cada articulação contém uma mola espiral de rigidez angular ***K***, ligando o painel ao corpo, cuja posição angular de força nula corresponde a $\theta = \pi/2$. Lembrando que a energia cinética pode ser determinada por:



a) Posição de lançamento

b) Abertura dos painéis

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$T = \frac{1}{2} m V^2 + m \vec{V}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (G - A) + \frac{1}{2} \omega^T J_A \, \omega$$

(a) Determine as energias cinética ***T*** e potencial ***V*** do sistema;
(b) Desenhe o diagrama de blocos que você implementou no programa de simulação numérica, para o sistema nas coordenadas generalizadas (***x*** e ***θ***);
(c) Esboce o gráfico temporal da posição angular do painel em ***A***, durante a simulação do processo de abertura dos painéis.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

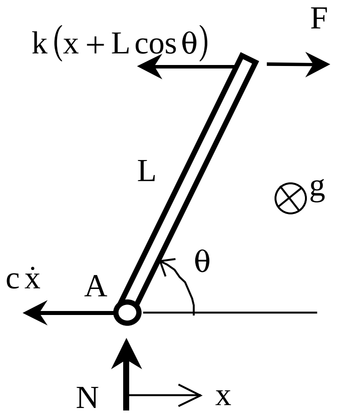
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 06 de julho de 2004

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

RESOLUÇÃO

1ª Questão (4,0 pontos) – Resolução



n.g.l = 2

$q_1 = x$

$q_2 = \theta$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\,\vec{i}\cdot\dot{\theta}\vec{k}\wedge\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\vec{j}\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\theta + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2}$$

Hipóteses:

- mola ñ-deformada em x = 0; $\theta = \frac{\pi}{2}$;
- mola sempre horizontal.

$$\Rightarrow \delta_{mola} = x + L\cos\theta \quad \Rightarrow V = \frac{1}{2}k(x + L\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}kx^2 + kxL\cos\theta + \frac{1}{2}kL^2\cos^2\theta}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\theta + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - kxL\cos\theta - \frac{1}{2}kL^2\cos^2\theta$$

$$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{mL}{2}\dot{\theta}\,\text{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx - kL\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{mL}{2}\dot{x}\,\text{sen}\theta + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \quad \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -\frac{mL}{2}\ddot{x}\,\text{sen}\theta - \frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + kxL\,\text{sen}\theta + kL^2\cos\theta\,\text{sen}\theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$x_1 = x + L\cos\theta$; $F_1 = F$

$x_2 = L\text{sen}\theta$; $F_2 = 0$

$Q''_x = F$

$Q''_\theta = -FL\text{sen}\theta$

$$\boxed{m\ddot{x} - \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\,\text{sen}\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta + kx + kL\cos\theta + c\dot{x} = F}$$

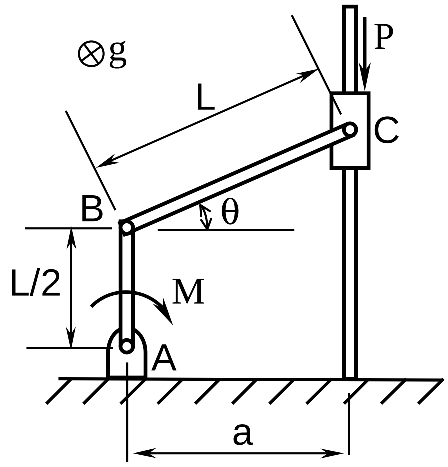
$$\boxed{\frac{mL}{2}\ddot{x}\,\text{sen}\theta + \frac{mL}{2}\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta - \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{mL}{2}\dot{x}\,\dot{\theta}\cos\theta + kxL\text{sen}\theta + kL^2\cos\theta\,\text{sen}\theta = FL\text{sen}\theta}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos) – **Resolução**



PTV: $\delta W = 0$

Sendo ϕ o ângulo que determina uma posição genérica da barra AB (na posição considerada $\phi = 0$):

$M\delta\phi = P\delta C$ (1)

Sendo:

$$(C - A) = a\vec{i} + \left(\frac{L}{2}\cos\phi + L\mathrm{sen}\theta\right)\vec{j}$$

o deslocamento virtual de C é:

$$\delta C = -\frac{L}{2}\mathrm{sen}\phi\delta\phi + L\cos\theta\delta\theta$$

para $\phi = 0$, $\mathrm{sen}\phi = 0$ e portanto $\delta C = L\cos\theta\delta\theta$ (2)

Da figura, considerando AB numa posição genérica, obtêm-se a seguinte relação geométrica:

$$\frac{L}{2}\mathrm{sen}\phi + L\cos\theta = a$$

que diferenciando resulta em:

$$\frac{L}{2}\cos\phi\delta\phi = L\mathrm{sen}\theta\delta\theta \quad \rightarrow \quad \delta\phi = 2\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\phi}\delta\theta$$

para $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ e portanto $\delta\phi = 2\mathrm{sen}\theta\delta\theta$ (3)

Substituindo (2) e (3) em (1):

$$2M\mathrm{sen}\theta\delta\theta = PL\cos\theta\delta\theta$$

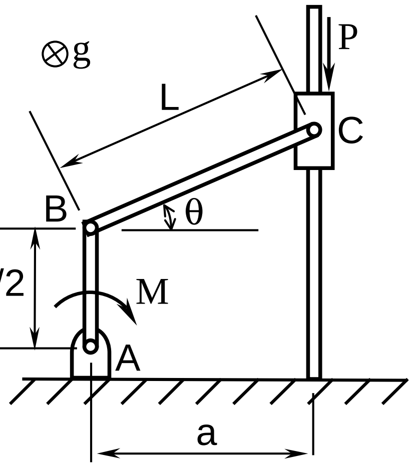
$$\boxed{M = \frac{PL}{2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos) – **Resolução Alternativa**



<u>PTV:</u> $\delta W = 0$

Sendo ϕ o ângulo que determina uma posição genérica da barra AB (na posição considerada $\phi = 0$):

$$M\delta\phi = P\delta C \qquad (1)$$

Sendo:

$$\frac{dB}{dt} = \dot{\phi}\frac{L}{2}\vec{i}$$

Propriedade de corpo rígido:

$$\frac{dB}{dt}\cdot(B-C) = \frac{dC}{dt}\cdot(B-C) \quad \rightarrow \quad \dot{\phi}\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{dC}{dt}\mathrm{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt}\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{dC}{dt}\mathrm{sen}\theta$$

$$d\phi\frac{L}{2}\cos\theta = dC\,\mathrm{sen}\theta \quad \rightarrow \quad d\phi = \frac{2\mathrm{sen}\theta}{L\cos\theta}dC \quad \rightarrow \quad \delta\phi = \frac{2\mathrm{sen}\theta}{L\cos\theta}\delta C$$

substituindo em (1):

$$M\frac{2\mathrm{sen}\theta}{L\cos\theta}\delta C = P\delta C$$

$$\boxed{M = \frac{PL}{2}\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

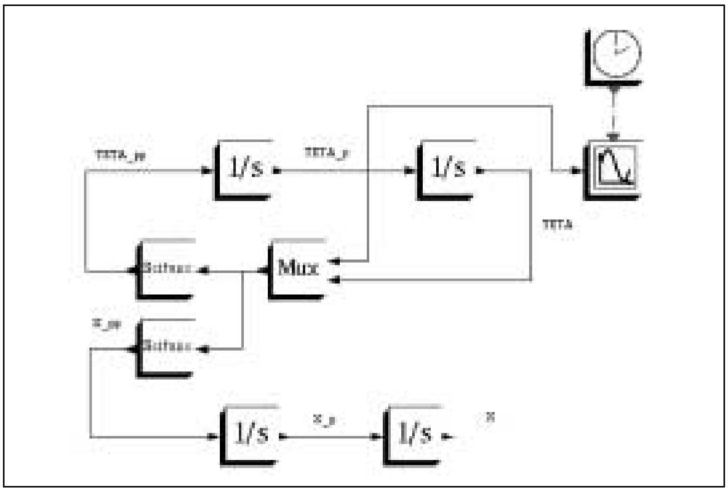
3ª Questão (3,0 pontos) - **Resolução**

a) A energia cinética ***T*** e a energia potencial ***V*** para os dois elementos elásticos do sistema são dados por:

$$T = (m + M/2)\,\dot{x}^2 - 2\,ma\,\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}(\theta) + J_A\,\dot{\theta}^2$$ (0,5 ponto) e

$$V = K(\theta - \pi/2)^2$$ (0,5 ponto)

b) Diagrama de bloco do sistema utilizado no programa SCICOS (1,0 ponto)



Resultados da abertura dos painéis na Etapa I estabiliza em $\pi/2$ (1,0 ponto)

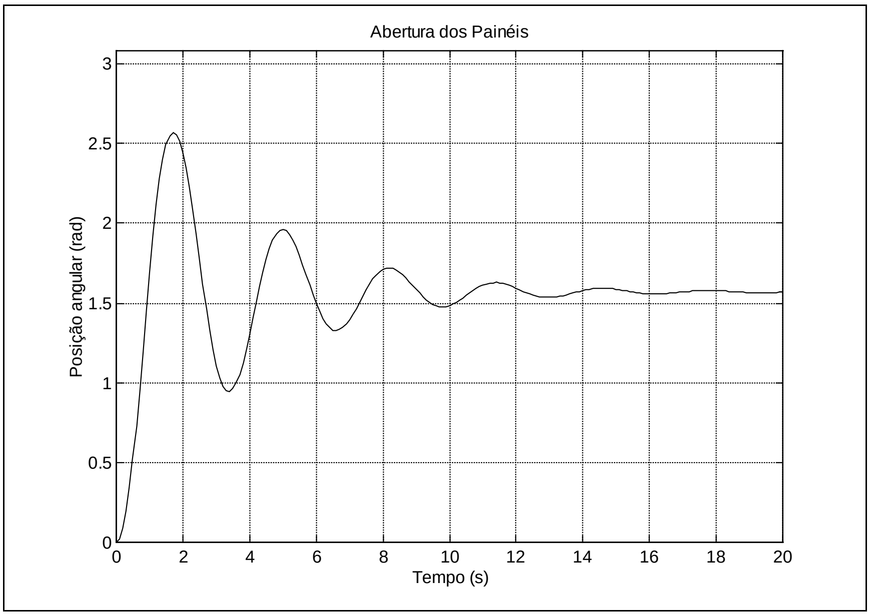


Gráfico da história temporal da posição angular do painel