ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

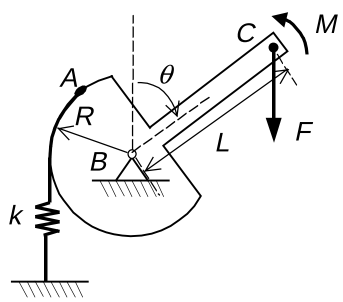
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – 17 de junho de 2003

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

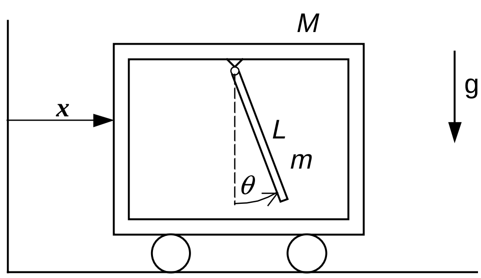
1ª Questão (3,0 pontos)

A força ***F*** e o momento ***M***, conhecidos, são aplicados ao balancim articulado em B, conforme mostrado na figura. A mola com rigidez ***k***, presa em A, na parte circular de raio ***R*** do balancim, não está deformada quando $\theta = 0°$. A posição do baricentro do balancim coincide com a articulação B. Pede-se, em função dos dados do problema e utilizando o **Princípio dos Trabalhos Virtuais**, determinar a posição θ de equilíbrio do sistema.



2ª Questão (4,0 pontos)

O vagão de massa ***M*** suporta um pêndulo composto de comprimento ***L*** e massa ***m***. O vagão pode deslocar-se horizontalmente e suas rodas, de massa desprezível, rolam sem escorregar. A posição do vagão é dada por ***x*** e θ fornece a inclinação do pêndulo. Usando ***x*** e θ como coordenadas generalizadas deste sistema, pede-se:



a) escreva a energia cinética **T** do sistema;
b) escreva a energia potencial **V** do sistema;
c) utilizando o método de *Lagrange*, deduza as equações que regem a dinâmica do sistema.

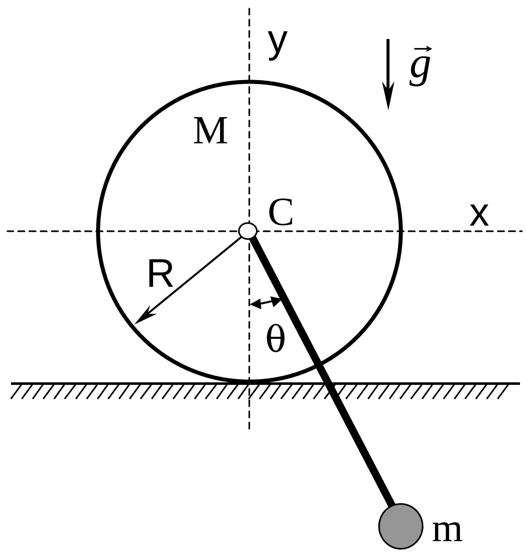
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

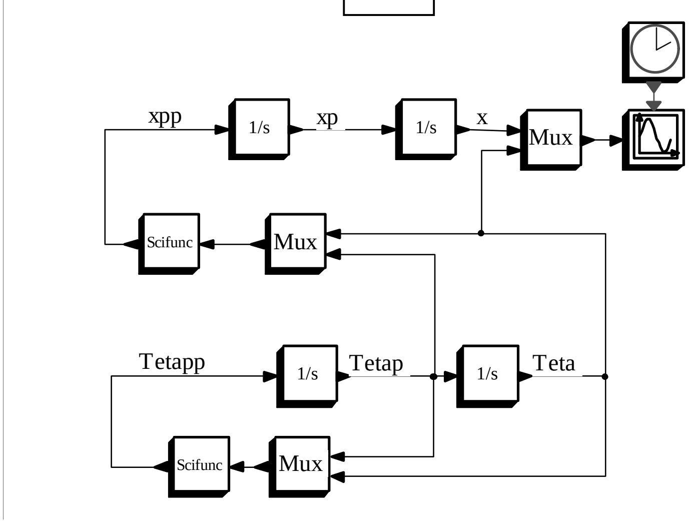
Considere o Exercício Computacional número 2, no qual é analisado o comportamento dinâmico do sistema mostrado na Figura ao lado. Pede-se:



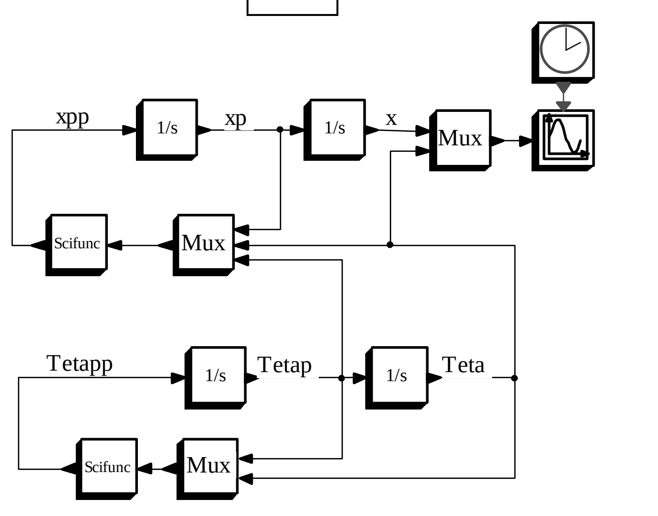
a) Dentre os diagramas A2 e B2, qual simula corretamente o comportamento dinâmico do sistema? Justifique claramente.

b) No item "f", analisou-se uma situação na qual o parâmetro $\alpha = M/m = 2$ e condições iniciais (t = 0): $x(0)=0; \dot{x}(0)=0; \theta(0)=30^o; \dot{\theta}(0)=0$. Esboce os gráficos de x(t) e θ(t), descreva os movimentos, interpretando-os. Faça comentários acerca de conservação de energia e da fase relativa entre os movimentos.

A2



B2



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

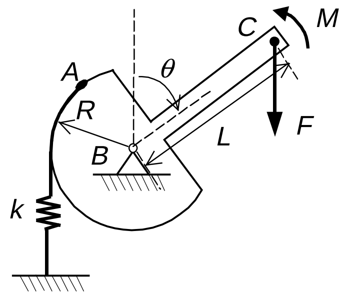
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Terceira Prova – Resolução - 17/06/2003

1ª Questão - Resolução (3,0 pontos)

A força ***F*** e o momento ***M***, conhecidos, são aplicados ao balancim articulado em B, conforme mostrado na figura. A mola com rigidez ***k***, presa em A, na parte circular de raio ***R*** do balancim, não está deformada quando θ = 90°. A posição do baricentro do balancim coincide com a articulação B. Pede-se, em função dos dados do problema e utilizando o Principio dos Trabalhos Virtuais, determinar a posição θ de equilíbrio do sistema.



$$y_C = L\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \delta y_C = -L\mathrm{sen}\theta\ \delta\theta$$

$$\mathrm{def}_{mola} = R(\theta) \ \Rightarrow\ \delta\mathrm{def}_{mola} = R\ \delta\theta$$

$$\delta W_F = -F\cdot(-L\mathrm{sen}\theta\ \delta\theta) = FL\mathrm{sen}\theta\,\delta\theta \qquad (1,0)$$

$$\delta W_M = -M\,\delta\theta \qquad (0,5)$$

$$\delta W_{mola} = -kR\,\theta\cdot R\ \delta\theta = -kR^2\theta\,\delta\theta \qquad (1,0)$$

<u>PTV:</u>

$$\delta W = FL\mathrm{sen}\theta\ \delta\theta - M\delta\theta - kR^2\,\theta\ \delta\theta = 0 \qquad (0,5)$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\,\theta - \frac{kR^2}{FL}\theta - \frac{M}{FL} = 0}$$

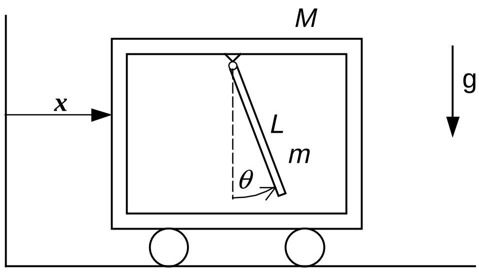
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão - Resolução (4,0 pontos)

O vagão de massa ***M*** suporta um pêndulo composto de comprimento ***L*** e massa ***m***. O vagão pode deslocar-se horizontalmente e suas rodas, de massa desprezível, rolam sem escorregar. A posição do vagão é dada por ***x*** e $\boldsymbol{\theta}$ fornece a inclinação do pêndulo. Usando ***x*** e $\boldsymbol{\theta}$ como coordenadas generalizadas deste sistema, pede-se:



a) escreva a energia cinética **T** do sistema;
b) escreva a energia potencial **V** do sistema;
c) utilizando o método de *Lagrange*, deduza as equações que regem a dinâmica do sistema

$$\vec{v}_G = \dot{x}\vec{i} + \dot{\theta}\frac{L}{2}\vec{\tau} = \dot{x}\vec{i} + \dot{\theta}\frac{L}{2}(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})$$

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2L^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2L^2) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{(M+m)}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}\dot{\theta}L\cos\theta + \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2} \qquad (1,0)$$

$$\boxed{V = -mg\frac{L}{2}\cos\theta} \qquad (1,0)$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{x}} = (M+m)\dot{x} + \frac{mL}{2}\dot{\theta}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(M+m)\ddot{x} + \frac{mL}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{mL}{2}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta = 0} \qquad (1,0)$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{\theta}} = \frac{mL}{2}\dot{x}\cos\theta + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{mL}{2}\ddot{x}\cos\theta - \frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial\theta} = -\frac{mL}{2}\dot{x}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{mL}{2}\ddot{x}\cos\theta + \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta = 0} \qquad (1,0)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5355 Fax: (0xx11) 3813 1886

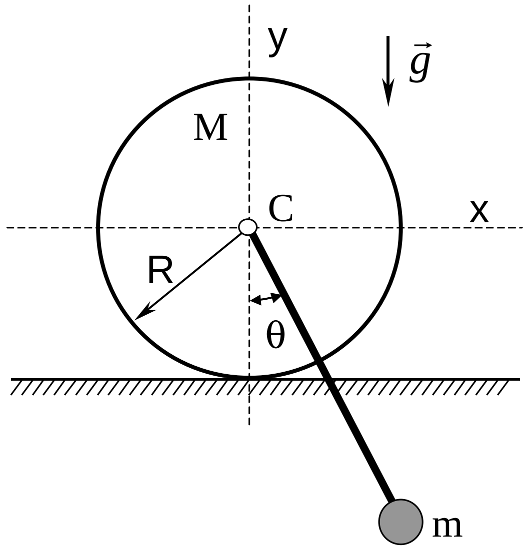
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão - Resolução (3,0 pontos)

Considere o Exercício Computacional número 2, no qual é analisado o comportamento dinâmico do sistema mostrado na Figura ao lado. Pede-se:

a) Dentre os diagramas A2 e B2, qual simula corretamente o comportamento dinâmico do sistema? Justifique claramente.

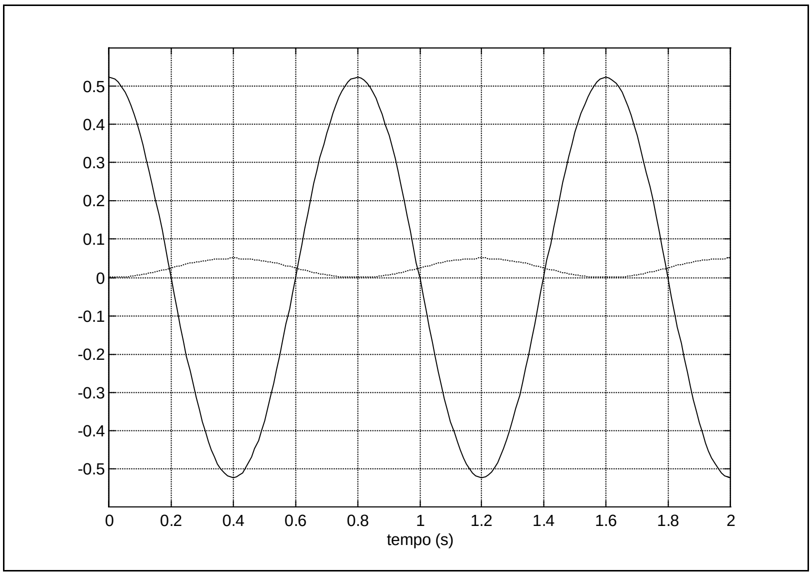
b) No item "f", analisou-se uma situação na qual o parâmetro α = M/m = 2 e condições iniciais (t = 0): $x(0)=0;\dot{x}(0)=0;\theta(0)=30^o;\dot{\theta}(0)=0$. Esboce os gráficos de x(t) e θ(t), descreva os movimentos, interpretando-os. Faça comentários acerca de conservação de energia e da fase relativa entre os movimentos.



Resolução:

a) O diagrama A2 simula corretamente o sistema pois as equações dependem apenas de θ e $\dot{\theta}$

b) Para as seguintes condições iniciais: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0)=0$; $\theta(0) = 30°$, $\dot{\theta}(0)=0$, $\alpha = 2$; obtêm-se o gráfico de θ(t) (linha contínua) e x(t) (linha pontilhada) mostrado na figura:



Podemos notar que o pêndulo, sob a ação gravitacional, põe-se a oscilar entre as posições angulares ± 30° (± π/6 radianos), com média nula. Ao iniciar o movimento o pêndulo transfere energia ao disco acelerando-o, e colocando-o em oscilação periódica, em torno de uma média não nula. Notem que, como não existe dissipação de energia, as amplitudes dos movimentos se mantêm e as oscilações ocorrem em oposição de fase (180°).