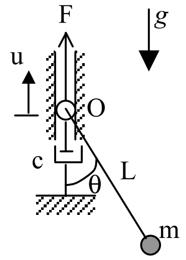
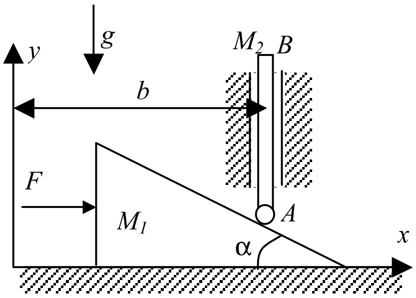
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PME 2200 - MECÂNICA B - 3ª Prova - 21/06/2001 - Duração: 100 minutos

(Não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Q. (3.5 ptos) - O pêndulo da figura é formado por uma haste sem massa de comprimento L e uma massa m concentrada em sua extremidade inferior. Uma força F, vertical, é aplicada na extremidade superior do pêndulo, no rolete O, de massa desprezível. A este rolete está conectado um amortecedor viscoso linear de constante c. Determinar as equações diferenciais do movimento do pêndulo, através das equações de Lagrange.



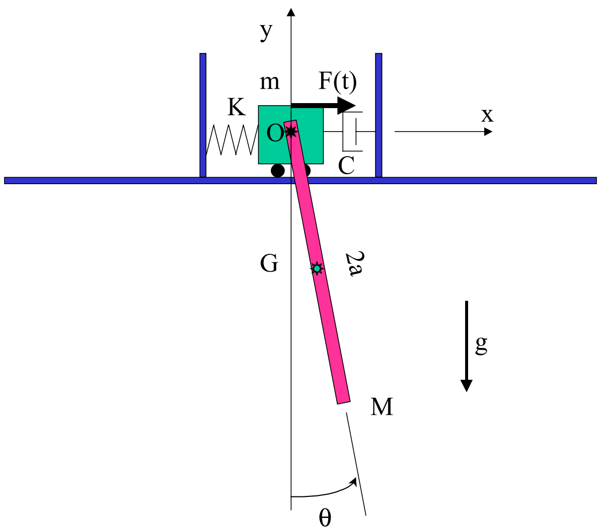
2ª Q. (3.0 ptos) - A peça triangular de massa M_1 está sobre um plano horizontal, sustentando a haste AB de massa M_2 que foi instalada em guias verticais; a haste AB desliza sem atrito nas guias, e não há atrito no contato entre a haste e a peça triangular. Determinar, empregando o Princípio dos Trabalhos Virtuais:



a) o valor da força F responsável pelo equilíbrio estático do sistema, supondo a ausência de atrito entre a peça triangular e o plano horizontal.

b) Suponha agora que exista atrito entre o plano e a peça triangular (coeficiente de atrito μ), mas que a força de atrito seja insuficiente para manter a peça em equilíbrio; qual o menor valor de F que mantém a peça em equilíbrio estático?

Questão 3) (3,5) A figura representa um sistema dinâmico composto por um pêndulo, formado por uma barra homogênea de comprimento 2a e massa M, que é articulado no ponto O a um bloco de massa m, que por sua vez pode se movimentar sobre roletes ideais (sem atrito) no plano horizontal, segundo o eixo x. Este bloco está vinculado a duas paredes verticais através de uma mola linear de constante K e um amortecedor, também linear, de constante C. Sobre este sistema pode agir a força $\vec{F}(t) = F(t)\vec{i}$ e um binário externo $\vec{B}(t) = B(t)\vec{k}$ atuando na barra**,** não indicado na figura. Pede-se:



(a) As equações que regem este sistema dinâmico usando $x(t)$ e $\theta(t)$ como coordenadas generalizadas são:

$$(M+m)\ddot{x} + (Ma\cos\theta)\ddot{\theta} - (Masen^2\theta)\dot{\theta}^2 + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$(Ma\cos\theta)\ddot{x} + (\frac{4M}{3})a^2\ddot{\theta} + Magsen\theta = B(t)$$

Linearize estas equações, e obtenha uma equação matricial na forma: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t)$, onde **q(t)** é o vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ são matrizes de dimensões compatíveis e **Q**(t) é o vetor de força generalizada.

b) Considerando o modelo não-linear e para as condições iniciais abaixo:

b1) $\theta(0) = \pi + \varepsilon;\ \dot{\theta}(0) = x(0) = \dot{x}(0) = 0$ onde , ε um número muito pequeno e

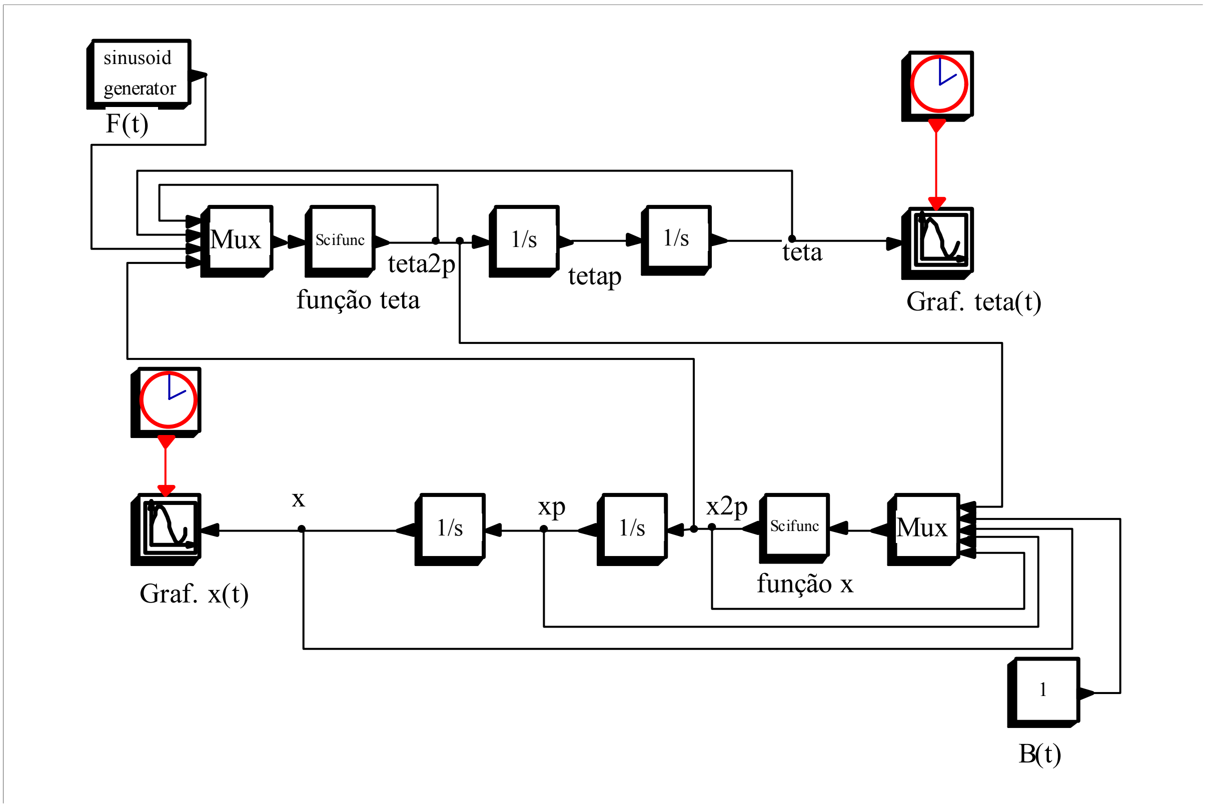
b2) $\theta(0) = \pi;\ \dot{\theta}(0) = x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0{,}001 m/s$

Explique muito sucintamente (2 linhas para cada caso), qual será o movimento da barra em cada um dos casos acima.

c) De acordo com as simulações que você elaborou para as condições do item (b), o sistema vai parar? O bloco pára? E a barra? Justifique sucintamente cada uma das respostas.

d) Avalie e discuta sucintamente o seguinte diagrama de blocos elaborado para simular os movimentos do sistema linearizado no Scicos do Scilab, onde:

$$teta2p = \ddot{\theta};\ tetap = \dot{\theta};\ teta = \theta;\ xp = \dot{x};\ x2p = \ddot{x}$$



PME – 2200 – P#03 – 21/06/2001 – RESOLUÇÃON DETALHADA

Solução Q1

Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2}m\left[\left(L\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(\dot{u} + L\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{u}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{u}^2\right];$$

Energia Potencial e Lagrangeana:

$$V = mg\left(u - L\cos\theta\right); \therefore \mathrm{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{u}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{u}^2\right] - mg\left(u - L\cos\theta\right);$$

Função de dissipação de Rayleigh e forças não conservativas

$$R = \frac{1}{2}c\dot{u}^2;\ \delta W = F\delta u \Rightarrow \begin{cases} Q_\theta = 0 \\ Q_u = F \end{cases};$$

Equação de Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{i}}\right) - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{i}} + \dfrac{\partial R}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{i}} = Q_i$;

Para $q_1 = u$: $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{u}} = mL\dot{\theta}\sin\theta + m\dot{u};\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{u}}\right) = mL\ddot{\theta}\sin\theta + mL\dot{\theta}^2\cos\theta + m\ddot{u};$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u} = -mg;\ \frac{\partial R}{\partial \dot{u}} = c\dot{u};\ \therefore \boxed{m\ddot{u} + mL\ddot{\theta}\sin\theta + mL\dot{\theta}^2\cos\theta + c\dot{u} + mg = F}$$

Para $q_2 = \theta$: $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} + mL\dot{u}\sin\theta;\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{u}\sin\theta + mL\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta;$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = mL\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta - mgL\sin\theta;\ \therefore \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g + \ddot{u}}{L}\sin\theta = 0}$$

Solução Q2

a) Seja B o ponto de aplicação de $\vec{F}$; o equilíbrio estático do sistema requer que

$$\delta W = \vec{F} \bullet \delta\vec{r}_B + M_2 g(-\vec{j}) \bullet \delta\vec{r}_A = 0$$

$$\vec{r}_B = x\vec{i} \Rightarrow \delta\vec{r}_B = dx\vec{i};\vec{r}_A = b\vec{i} + y_A\vec{j}; y_A = x\tan\alpha \Rightarrow \delta\vec{r}_A = \delta x\tan\alpha\vec{j};$$

Portanto

$$,\delta W = F\delta x - M_2 g\tan\alpha\delta x = 0;$$

$$\Rightarrow F = M_2 g\tan\alpha$$

b) Na iminência de escorregamento para a esquerda, a força de atrito entre a peça triangular e o plano é:

$$\vec{F}_{at} = \mu(M_1 + M_2)g\vec{i};$$
$$\delta W = [F + \mu(M_1 + M_2)g]\delta x - M_2 g \tan\alpha \delta x = 0;$$
$$\Rightarrow F = M_2 g \tan\alpha - \mu(M_1 + M_2)g$$

<u>Solução Q3</u>

a)

$$\begin{bmatrix} M+m & Ma \\ Ma & \dfrac{4Ma^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & Mag \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ B \end{Bmatrix}$$

b) A barra sofre perturbação (nos dois casos) a partir de uma posição de equilíbrio instável. Os dois movimentos são semelhantes.

c) Sim, o sistema (barra e bloco) irá parar devido à dissipação de energia no amortecedor.

d)