MONITORIA MAT 4 13/05

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F : U \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \subset \quad \subsetneq \quad \subseteq$$

$$Df(x) : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$DF(x) : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$g : \Omega \underset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q, \; p \in \Omega$$

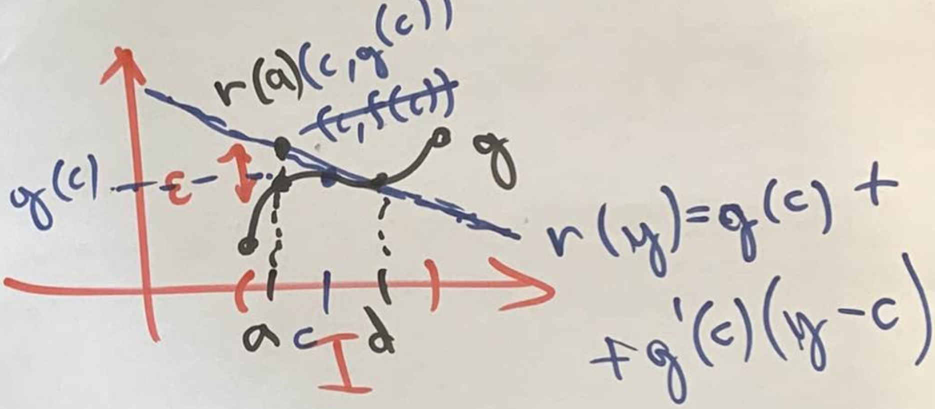
Dizemos que uma transf. linear $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é a diferencial de g em p, e que g é diferenciável em p

se

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \frac{\|g(p+h) - g(p) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

MOTIVAÇÃO: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $c \in I$ e $g: I \to \mathbb{R}$ é derivável em c, então $\varepsilon(c,h) = |g(c+h) - g(c)|$ satisfaz

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(c,h)}{h} = 0$$



? $g: I \subset_{ab.} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $c \in I$

Quem é a diferencial de g?

? Quem são as transf. lineares $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$?

Sabemos que $\{1\}$ é base de $\mathbb{R}$

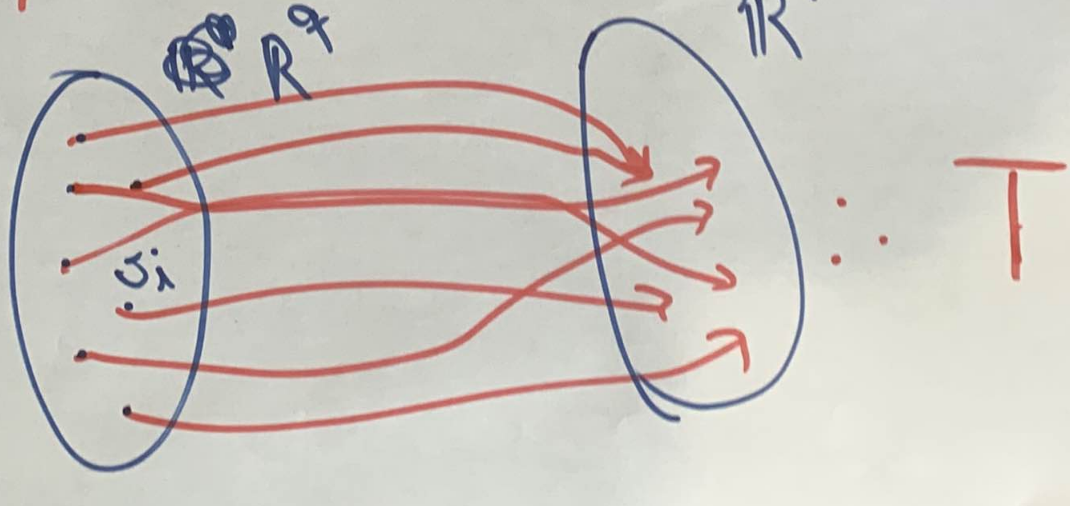
Uma $T: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ está totalmente determinada pelos valores que assume em uma base de $\mathbb{R}^q$

$$\{v_1, \dots, v_q\} \underset{\text{base}}{\subset} \mathbb{R}^q$$

$$\{w_1, \dots, w_q\} \subset \mathbb{R}^p$$

$\exists!\ T: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ linear t.q.

$$T(v_i) = w_i \quad , i = 1, \dots, q.$$



Conclusão: Se $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ é linear, então $T(x) = x\,T(1)\ \forall x \in \mathbb{R}$

A diferencial de ~~$g: \mathbb{R} \to H$~~ $g: I \to \mathbb{R}^r$ em $c \in I$ (onde g possui velocidade $g'(c)$) é a transf. linear dada por $Dg(c)(h) =$

$= \cancel{hg'(c)}\ \cancel{g'(c)}\ h\,g'(c)$

~~Def~~ Dem.: $g'(c) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(c+h) - g(c)}{h}$

$\to 0 = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(c+h) - g(c) - g'(c)\cdot(h\cdot 1)}{|h \cdot 1|}$

$f : \Omega \underset{ab.}{\subseteq} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar)

$F : \Omega \underset{ab.}{\subseteq} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ (campo de vetores)

$\exists\, \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x}) \right)$

t.q. $Df(\bar{x})(h) = \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle$

$\nabla \cdot F(\bar{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}) + \dots +$

$+ \frac{\partial F_p}{\partial x_p}(\bar{x})$

F

$$F:\Omega\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p\ \left(F=(F_1,\dots,F_p)\right)$$

$$JF(\bar{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p}\\ \vdots & & & \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial x_p}\end{bmatrix}$$

$$\nabla\cdot F(\bar{x})=\mathrm{Tr}\,JF(\bar{x})=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$$\nabla\cdot : CV\longrightarrow CE$$

$$\nabla : CE\longrightarrow CV$$

$$\Delta : CE\longrightarrow CE$$

$$\Delta f(\bar{x})=\left[\nabla\cdot(\nabla f)\right](\bar{x})$$

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$$

$$J(\nabla f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial x_p} \end{bmatrix}$$

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$J(\nabla f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{g \circ f}$$

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Laplaciano: $\nabla^2 f$, Δf

Divergente: $\nabla \cdot F$, $\operatorname{div} F$

Gradiente: ∇f, $\operatorname{grad} f$

—/—

Funcionais Lineares

Seja V um esp. vet. real

Um funcional linear em V é uma transfonmação linear $f: V \to \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(V; W)$

$\mathcal{L}(V; \mathbb{R}) = \{\text{funcionais lineares}\}$

$= V^*$ é chamado de espaço dual algébrico de V

<u>Teorema</u>: Se $\dim V = n < \infty$, então $\dim V^* = n$.

Prova: Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$f_{v_i} \in V^*$

$$f_{v_i}(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$\{f_{v_1}, \dots, f_{v_n}\}$ é base de V^*

(chamada de base dual)

Teorema (da Rep. Riesz):

$$T : V \to V^*$$

$$v \longmapsto f_v(w) = \langle v, w \rangle$$

é linear bijetora.

OBS.: Se $f: \Omega \underset{ab.}{\subseteq} \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$

é diferenciável em $\bar{x} \in \Omega$, então

$Df(\bar{x}) \in (\mathbb{R}^p)^*$ e

$$Df(\bar{x}) = T(\nabla f(\bar{x}))$$

onde T é o isomorfismo linear do Teo. anterior

$$(V^*)^* = V^{**}$$

Teorema: Se V tem dimensão finita, então a transf. linear

$$E: V \longrightarrow V^{**}$$
$$v \longmapsto E_v(f) = f(v)$$

é bijetora