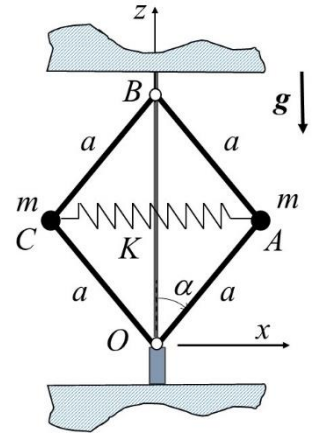




MECÂNICA II - PME 3200 – Segunda Prova– 04 de julho de 2023
Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos). Considere o mecanismo mostrado na figura. As quatro barras de comprimento a são rígidas e de massa desprezível. As articulações em O, A, B e C são ideais. Nas articulações A e C existem pequenas esferas de massa m , ligadas por uma mola linear ideal de constante elástica K e cujo comprimento indeformado é $b \leq a/4$. Além disso, a articulação B pode deslizar na vertical, guiada sem atrito pela haste rígida que é mostrada na figura e que está presa no bloco fixo superior. Utilizando o sistema ortogonal de coordenadas $Oxyz$ ($O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) e o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), obtenha a expressão que permite calcular o ângulo α de equilíbrio estático em função dos parâmetros m, a, b e K e da aceleração da gravidade g . Expresse-a usando os números adimensionais $\left(\frac{Ka}{mg}\right)$ e $\left(\frac{a}{b}\right)$.



OBS: a mola é montada em plano vertical anterior ao plano do quadro, de forma a não interferir com a haste-guia.

Resolução:

Os vínculos são holônomos. Assim, do PTV,

$$\delta W = \delta W_g + \delta W_e \equiv 0, \quad (1)$$

onde δW_g e δW_e referem-se aos trabalhos virtuais das forças gravitacionais e elásticas, respectivamente.

Utilizando o sistema cartesiano $Oxyz$, os vetores de posição de A e O são escritos:

$$\begin{aligned} (A - O) &= a(\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{k}) \\ (C - O) &= a(-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{k}) \end{aligned}, \quad (2)$$

(0,5)

de onde

$$\begin{aligned} \delta A &= a\delta\alpha(\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{k}) \\ \delta C &= -a\delta\alpha(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{k}) \end{aligned}. \quad (3)$$

(0,5)

O que traz,

$$\delta W_g = -mg\vec{k} \cdot \delta A - mg\vec{k} \cdot \delta C = 2mga \sin \alpha \delta\alpha \quad (4)$$

$$\delta W_e = -K(2a \sin \alpha - b)\vec{i} \cdot \delta A + K(2a \sin \alpha - b)\vec{i} \cdot \delta C = -2Ka(2a \sin \alpha - b) \cos \alpha \delta\alpha \quad (1,0)$$

E, finalmente, de (4) em (1),

$$2mga \sin \alpha \delta\alpha - 2Ka \cos \alpha (2a \sin \alpha - b) \delta\alpha = 0, \quad (5)$$

(0,5)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Que fornece, para um deslocamento virtual arbitrário $\delta\alpha$:

$$mg \sin \alpha = K \cos \alpha (2a \sin \alpha - b) \quad . \quad (6)$$

(0,5)

Essa equação transcendental, uma vez resolvida, traz o ângulo de equilíbrio. Ela pode ainda ser escrita na forma adimensional:

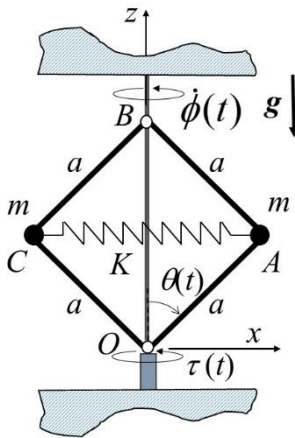
$$\tan \alpha = \frac{Ka}{mg} \left(2 \sin \alpha - \frac{b}{a} \right) \quad . \quad (7)$$

(0,5)

Note que dependendo dos parâmetros (K, a, m, g, b) , a equação (7) pode ter uma, duas ou nenhuma solução no intervalo $0 < \alpha < \pi/2$. Sua solução pode ser obtida por método numérico (Newton-Raphson, p.ex.) ou de forma aproximada por um método gráfico. Restará analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica



2ª Questão (3,5 pontos). Considere, novamente, o mesmo mecanismo da 1ª questão. Sabe-se que, sob a ação do torque aplicado, $\tau(t)$, o sistema adquire rotação $\dot{\phi}(t)$ em torno do eixo Oz . Nessas condições, pede-se:

- a expressão da energia cinética do sistema;
- a expressão da energia potencial do sistema;
- as expressões das forças generalizadas não-conservativas, associadas ao torque aplicado $\tau(t)$;
- deduzir as equações de movimento para as coordenadas generalizadas, θ e ϕ , utilizando o formalismo de Lagrange.
- (*bônus: 0,5 ponto*) determine a expressão que permite calcular a posição θ^* de equilíbrio sob rotação; para tanto suponha $\dot{\phi} = \omega = const.$ na equação que rege θ .

Resolução:

(a) A expressão da energia cinética do sistema.

Visto que as massas das barras são desprezíveis, bem como da mola e das peças de ligação, a energia cinética do sistema fica dada pela expressão:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + \frac{1}{2} m \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C$$

ou

$$T = 2 \left(\frac{1}{2} m v_A^2 \right) = m v_A^2$$

(1)

(0,5)

A velocidade do ponto A pode ser escrita, na base $(\vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$:

$$\vec{v}_A = a \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi + a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

(2)

com

$$\vec{e}_\phi = \vec{j}$$

(3)

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{k}$$

Portanto,

$$T = m a^2 \left[(\dot{\phi} \sin \theta)^2 + \dot{\theta}^2 \right]$$

(4)

(0,5)

(b) A expressão da função de energia potencial do sistema.

A função de energia potencial pode ser escrita na forma:

$$V = V(\theta) = V_g(\theta) + V_e(\theta)$$

(5)

(0,5)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

onde V_g e V_e referem-se às energias potenciais de origens gravitacional e elástica, respectivamente.

A primeira pode ser escrita,

$$V_g = 2mga \cos \theta, \quad (6)$$

e a segunda,

$$V_e = \frac{1}{2} K(2a \sin \theta - b)^2 \quad (7)$$

Assim,

$$V = 2mga \sin \theta + \frac{1}{2} K(2a \sin \theta - b)^2 \quad (8)$$

(0,5)

(c) As expressões das forças generalizadas não-conservativas, associadas ao torque aplicado $\tau(t)$.

O trabalho virtual do torque aplicado (não conservativo) pode ser escrito:

$$\delta W_\tau = Q_\phi \delta \phi + Q_\theta \delta \theta \quad (9)$$

Como o torque se dá em torno do eixo z , ele é um vetor orientado pelo versor \vec{k} , i.e., $\vec{\tau}(t) = \tau(t)\vec{k}$, que é perpendicular ao versor \vec{j} , o qual orienta a rotação θ . Desta forma,

$$\begin{aligned} Q_\phi &= \tau(t) \\ Q_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(0,5)

(d) Deduzir as equações de movimento para as coordenadas generalizadas, θ e ϕ , utilizando o formalismo de Lagrange.

O sistema é holônomo e conservativo, com dois graus de liberdade, e sua configuração pode ser expressa pelo vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = [\theta \ \phi]^T$. Assim, as duas Equações de Lagrange que regem seu movimento são:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_\theta^{nc} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= Q_\phi^{nc} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

com $L = L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = T(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) - V(\theta)$ a função Lagrangiana. Ou podem ser escritas:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= Q_\theta^{nc} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} &= Q_\phi^{nc} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

(0,5)

Por sua vez, as derivadas parciais presentes na equação (12) são prontamente calculadas, a partir de (4) e (8).



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \theta} &= 2ma^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= 2ma^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -2mga \sin \theta + 2a \cos \theta K(2a \sin \theta - b)\end{aligned}\quad (13)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= 2ma^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

E finalmente, de (10), (12) – (14) as equações de movimento são finalmente deduzidas:

$$\begin{cases} 2ma^2 \ddot{\theta} - 2ma^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2Ka \cos \theta (2a \sin \theta - b) - 2mga \sin \theta = 0 \\ 2ma^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 4ma^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = \tau(t) \end{cases} \quad (15)$$

(0,5)

Podem ser simplificadas na forma:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{Ka}{ma^2} \cos \theta (2a \sin \theta - b) - \frac{g}{a} \sin \theta = 0 \\ \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = \frac{\tau(t)}{2ma^2} \end{cases} \quad (15)$$

Note que no equilíbrio estático, com $\tau(t) \equiv 0$ e quando $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\phi} = 0$, a equação (15.a) recupera a equação de equilíbrio deduzida na primeira questão, com $\bar{\theta} = \alpha$:

$$mg \sin \alpha = K \cos \alpha (2a \sin \alpha - b) \quad (16)$$

ou

$$\tan \alpha = \frac{Ka}{mg} \left(2 \sin \alpha - \frac{b}{a} \right) \quad (17)$$

Note também que esta equação de equilíbrio pode ser deduzida diretamente da condição $\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0$ (lembre que $V = V(\theta)$). Por sua vez, a estabilidade dos possíveis pontos de equilíbrio pode ser verificada examinando-se o sinal de $\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=\alpha}$.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

(e) (*Bônus: 0,5 ponto*) Determine a expressão que permite calcular a posição θ^* de *equilíbrio sob rotação*; para tanto suponha $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$, na equação que rege θ .

Tomando (15.a) com $\tau(t) \equiv 0$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \omega = \text{const}$ e $\ddot{\theta} = \ddot{\phi} = 0$, $\theta = \theta^* = \text{const}$, segue

$$-\omega^2 \sin \theta^* \cos \theta^* + \frac{Ka}{ma^2} \cos \theta^* (2a \sin \theta^* - b) - \frac{g}{a} \sin \theta^* = 0 \quad , \quad (18)$$

(bônus: + 0,5)

que pode ser reescrita:

$$-\frac{\omega^2 a}{g} \sin \theta^* \cos \theta^* + \frac{Ka}{mg} \cos \theta^* (2 \sin \theta^* - \frac{b}{a}) - \sin \theta^* = 0 \quad , \quad (19)$$

ou

$$\frac{Ka}{mg} (2 \sin \theta^* - \frac{b}{a}) - \frac{\omega^2 a}{g} \sin \theta^* = \tan \theta^* \quad . \quad (20)$$

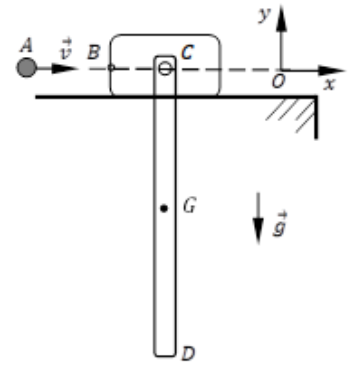
Compare a última expressão com a de equilíbrio estático, (17). Na realidade, pode-se introduzir o conceito de energia potencial centrípeta e a mesma expressão será deduzida de uma função potencial estendida,

$V_{ext} = V_g + V_e + V_c$, onde V_c é o potencial centrípeta, a partir da condição $\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\theta^*} = 0$.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). No esquema da figura, a pequena esfera A , de massa m , choca-se com velocidade conhecida $\vec{v} = v\vec{i}$, em um ponto B de um bloco que possui massa $2m$ e que está inicialmente em repouso. No centro do bloco, há uma articulação ideal C que sustenta a barra homogênea CD , de massa m e comprimento L , que também está inicialmente em repouso e orientada verticalmente. Sabe-se, ainda, que:



(i) não há atrito entre o bloco e a superfície horizontal sobre a qual ele repousa;

(ii) o coeficiente de restituição no choque vale e , $0 \leq e \leq 1$.

Utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ ($O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) pede-se:

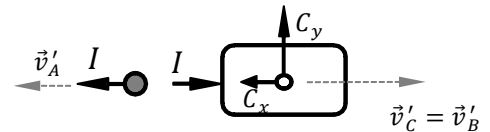
(a) desenhar os diagramas de corpo livre para impulsos agentes na esfera, no bloco e na barra (cada corpo separadamente);

(b) utilizando o TRI e o TMI, escrever o sistema de equações que permita obter, imediatamente após o choque, as velocidades \vec{v}'_A, \vec{v}'_B , respectivamente da esfera e do bloco, e $\vec{\omega}'$, vetor rotação da barra, em função dos parâmetros v, e, m e L .

Atenção: identifique claramente, a partir dos DCLs, quantas e quais são as incógnitas. **Não é necessário resolver as equações desenvolvidas**, porém é **obrigatório especificar quais seriam aquelas utilizadas** para que se pudesse obter a solução de maneira unívoca.

Resolução:

a) DCL: note que \vec{v}'_A, \vec{v}'_B e $\vec{\omega}'$ não fazem parte do DCL, mas foram representados para melhor compreensão das equações utilizadas na solução do problema (0,5 ponto).



b) de acordo com o DCL, serão escritas as equações do TRI para a esfera e para o bloco, e as equações do TRI e do TMI para a barra:

TRI – esfera

$$m(v'_A - v)\vec{i} = -I\vec{i} \quad (1)$$

TRI—bloco

$$2m(v'_B\vec{i} - \vec{0}) = (I - C_X)\vec{i} + C_Y\vec{j} \quad (2)$$

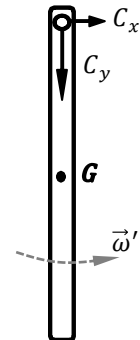
TRI—barra

$$m(v'_{Gx}\vec{i} + v'_{Gy}\vec{j}) - m(\vec{0}) = B_X\vec{i} - B_Y\vec{j} \quad (3)$$

TMI – barra, polo G

$$m(\vec{G} - G) \wedge \Delta\vec{v}'_G + J_G(\omega' - 0)\vec{k} = \vec{M}_G = (C - G) \wedge B_X\vec{i}$$

$$J_G\omega'\vec{k} = \frac{L}{2}\vec{j} \wedge C_X\vec{i} = -\frac{L}{2}C_X\vec{k} \quad (4)$$



Pontuação: montagem das equações para TRI esfera e bloco – 0,5 ponto.

montagem das equações para TRI e TMI, barra – 0,5 ponto.

Temos:

De (2)

$$\vec{i}: 2m v'_B = I - C_X \quad (2)$$

$$\vec{j}: 0 = B_Y$$

De (3)

$$\vec{i}: m v'_G = C_X \quad (3)$$

$$\vec{j}: m v'_{Gy} = C_Y = 0$$

Portanto, temos até aqui 6 incógnitas, v'_A, I, B_X, v'_B, v'_G e ω' e 4 equações para resolvê-las:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\left. \begin{aligned} m(v'_A - v) &= -I & (1) \\ 2m v'_B &= I - C_X & (2) \\ m v'_G &= C_X & (3) \\ J_G \omega' &= -\frac{L}{2} C_X & (4) \end{aligned} \right\} \text{(1,0 ponto – equações finais)}$$

As duas equações adicionais são fornecidas pelo vínculo de corpo rígido da barra BC e pela hipótese de Newton para o choque entre a esfera e o bloco.

Vínculo de corpo rígido: equação do campo de velocidades

$$v'_{Gx} \vec{i} = v'_C \vec{i} + \omega' \vec{k} \wedge (G - C) = v'_C \vec{i} + \omega' \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\right) \vec{j}$$

$$v'_G \vec{i} = v'_C \vec{i} + \frac{\omega' L}{2} \vec{i} \quad (5a)$$

Como o bloco efetua translação, imediatamente conclui-se que $v'_B = v'_C$ e a eq. (5a) fica

$$v'_G \vec{i} = v'_B \vec{i} + \frac{\omega' L}{2} \vec{i} \quad (5b)$$

Hipótese de Newton

$$(v'_A - v'_B) = -e(v - 0) = -ev \quad (6)$$

(0,5 ponto)

Resolvendo simultaneamente as 6 equações obtêm-se:

$$\vec{v}'_A = \frac{(4 - 9e)}{13} v \vec{i}; \quad \vec{v}'_B = \frac{4(1 + e)}{13} v \vec{i}; \quad \vec{\omega}' = -\frac{6(1 + e)}{13} \frac{v}{L} \vec{k}$$

Solução alternativa considerando bloco e barra como um corpo só (válida no evento do choque):

1) cálculo da coordenada y_G do centro de massa do conjunto: $y_G = 2m \cdot 0 + \left(-\frac{L}{2}\right) \cdot m = 3m \cdot y_G \Rightarrow y_G = -\frac{L}{6}$;

2) cálculo do momento de inércia em relação ao centro de massa obtido acima: $J_{Gz} = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{36}\right) + \frac{2mL^2}{36} = \frac{mL^2}{4}$;

3) equações 1 e 6 são mantidas

4) TRI e TMI para o conjunto bloco e barra: observe que os impulsos em C tornam-se internos ao conjunto e, portanto, não aparecem nas equações do TMI e do TRI.

TRI:

$$3m v'_G = I \quad (7)$$

TMI, polo C do conjunto: a) cálculo de J_{Cz} :

$$J_{Cz} = \left(\frac{mL^2}{4} + \frac{3mL^2}{36}\right) = \frac{mL^2}{3}$$

b) TMI:

$$3m(G - C) \wedge v'_C \vec{i} + \frac{mL^2}{3} \omega' \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$3m \left(-\frac{L}{6} \vec{j}\right) \wedge v'_C \vec{i} = -\frac{mL^2}{3} \omega' \vec{k} \Rightarrow v'_C = -\frac{2}{3} L \omega' \quad (8)$$

5) vínculo cinemático de corpo rígido entre os pontos C e G: $\vec{v}'_G = v'_C \vec{i} + \omega' \vec{k} \wedge (G - C) = v'_C \vec{i} + \omega' \vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{6}\right) \vec{j}$

$$\vec{v}'_G = \left(v'_C + \frac{\omega' L}{6}\right) \vec{i} \quad (9)$$

A solução das equações 1, 6, 7, 8 e 9 fornece os mesmos resultados anteriores.