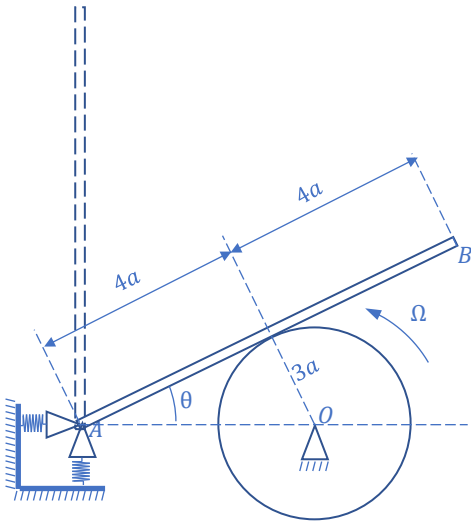




MECÂNICA II – PME 3200 –Segunda Prova – 7 de junho de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

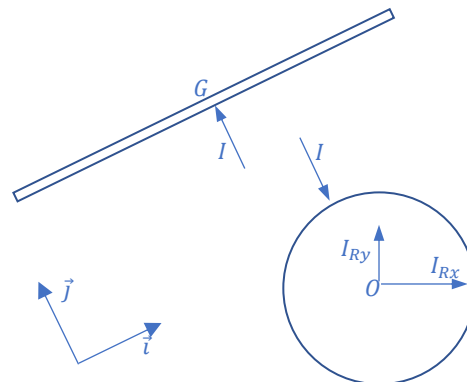


1ª Questão (4,0 pontos). A barra delgada homogênea AB , de comprimento $8a$ e massa m , é articulada idealmente em A , mantendo-se inicialmente em equilíbrio instável na posição vertical. O ponto A da barra é ligado através de molas ideais de igual constante k a duas superfícies fixas, conforme ilustrado na figura. Uma leve perturbação faz com que a barra gire no sentido horário, até chocar-se contra a superfície de um disco homogêneo de raio $3a$ e massa M , articulado em O , e que se encontra girando com velocidade angular Ω constante no instante do impacto. Admita que: 1º) durante o movimento de queda da barra, o deslocamento e a velocidade do ponto A são desprezíveis; 2º) o atrito em todos os contatos é desprezível. Sabendo, finalmente, que o coeficiente de restituição entre as superfícies do disco e da barra é $e = 1$, pedem-se:

- Os diagramas de impulsos para a barra e para o disco. (0,5)
- A velocidade angular ω da barra imediatamente antes da colisão. (0,5)
- As velocidades angulares ω' da barra e Ω' do disco imediatamente após a colisão. (0,5)
- O impulso aplicado pelo disco à barra. (2,0)
- O impulso aplicado ao disco em O . (0,5)

RESOLUÇÃO

(a) Diagramas de impulsos



(0,5)

(b) Velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão

Notemos que, no instante da colisão, a barra forma com a horizontal um ângulo $\theta = \sin^{-1} \frac{3}{5}$

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética à barra, entre o instante da partida e o da colisão, e admitindo que o deslocamento e a velocidade de A sejam desprezíveis, tem-se:



$$\frac{1}{2} J_{Az} \omega^2 = mg(4a - 4a \sin \theta) = 4mga \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} mga$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} m(8a)^2 \omega^2 = \frac{8}{5} mga$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{20a}} \Rightarrow \vec{\omega} = -\sqrt{\frac{3g}{20a}} \vec{k} \quad (0,5)$$

c) Velocidades angulares do disco e da barra imediatamente após a colisão

Aplicando-se o TMI à barra, relativamente ao polo G , tem-se:

$$J_{Gz} \Delta \omega \vec{k} = \vec{M}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega} = -\sqrt{\frac{3g}{20a}} \vec{k} \quad (0,25)$$

Aplicando-se o TMI ao disco relativamente ao polo O , tem-se:

$$J_{Oz} \Delta \Omega \vec{k} = \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} = \Omega \vec{k} \quad (0,25)$$

(d) Impulso aplicado pelo disco à barra

A velocidade do centro de massa da barra imediatamente antes do impacto é:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A - \omega \vec{k} \wedge 4a \vec{i} = \vec{0} - \sqrt{\frac{3g}{20a}} \vec{k} \wedge 4a \vec{i} = -2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j}$$

Como a barra é delgada, a velocidade do ponto P de contato com o disco é igual à velocidade de G , ou seja:

$$\vec{v}_P^{barra} = -2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j}$$

A velocidade do ponto P do disco imediatamente antes do choque é

$$\vec{v}_P = \Omega \vec{k} \wedge 3a \vec{j} = -3a\Omega \vec{i}$$

A velocidade de aproximação ao longo da normal de choque é, portanto,

$$u = \vec{v}_P^{barra} \cdot \vec{j} + \vec{v}_P^{disco} \cdot (-\vec{j}) = -2 \sqrt{\frac{3ga}{5}}$$

Como

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$$

a velocidade do ponto P do disco imediatamente após a colisão é:

$$\vec{v}'_P^{disco} = \vec{v}_P^{disco} = 3a\Omega \vec{i}$$



Aplicando-se a equação característica do choque sem atrito, de acordo com a hipótese de Newton, tem-se:

$$u' = -e \cdot u = -1 \cdot u = 2 \sqrt{\frac{3ga}{5}}$$

ou seja,

$$u' = \vec{v}'_P{}^{barra} \cdot \vec{j} + \vec{v}'_P{}^{disco} \cdot (-\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}'_P{}^{barra} \cdot \vec{j} + 3a\Omega\vec{i} \cdot \vec{j} = 2 \sqrt{\frac{3ga}{5}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}'_P{}^{barra} \cdot \vec{j} = 2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \Rightarrow \vec{v}'_P{}^{barra} = 2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j}$$

Sendo a barra delgada, conclui-se que

$$\vec{v}'_G = 2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j} \quad (1,0)$$

Aplicando-se o TRI à barra, resulta:

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = I\vec{j} \Rightarrow m \left[2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j} - \left(-2 \sqrt{\frac{3ga}{5}} \vec{j} \right) \right] = I\vec{j}$$

$$I = 4m \sqrt{\frac{3ga}{5}} \quad (1,0)$$

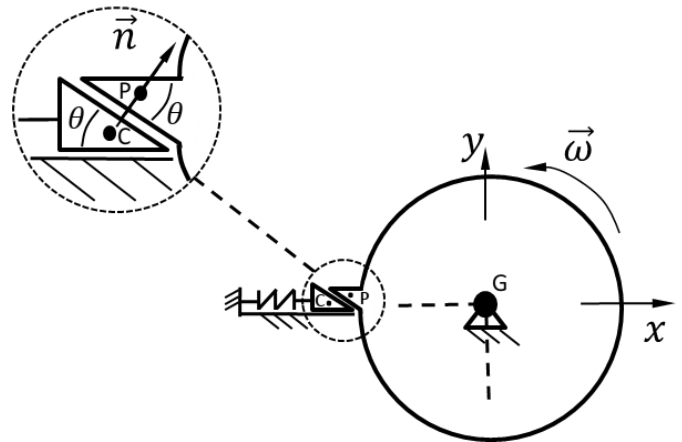
(e) Impulso aplicado ao disco no ponto O

Aplicando-se o TRI ao disco, conclui-se que

$$M(\vec{v}'_O - \vec{v}_O) = -I\vec{j} + \vec{I}_R \Rightarrow M(\vec{0} - \vec{0}) = -I\vec{j} + \vec{I}_R \Rightarrow \vec{I}_R = I\vec{j} \quad (0,5)$$



2ª Questão (4,0 pontos). Um cilindro maciço e homogêneo de raio r e massa $6m$ é sustentado pelo mancal ideal G e possui um pequeno ressalto em forma de cunha (vide detalhe) que, para efeito de inércia, pode ser considerado um ponto material. No detalhe, mostra-se a existência de outra cunha, C , de massa m , posicionada horizontalmente sobre uma superfície rígida e lisa (sem atrito) e ligada a uma mola de constante elástica k . O cilindro gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Imediatamente antes do choque entre as superfícies inclinadas de θ com a horizontal, a cunha C está em repouso e a mola em seu comprimento natural. O choque ocorre sem atrito segundo a normal \vec{n} , comum a ambas as superfícies inclinadas. Sabe-se também que a cunha permanece sempre em contato com a superfície horizontal e que o coeficiente de restituição no contato vale e , com $0 < e < 1$.



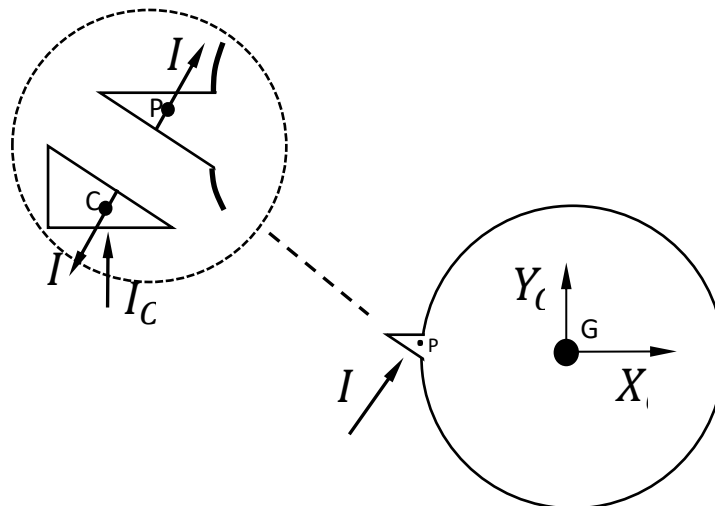
Nessas condições, pedem-se:

- o diagrama de corpo livre das forças impulsivas para a cunha C e para o cilindro;
- utilizando o TMI e o TRI (onde pertinente) para os corpos em separado, obtenha o sistema de equações que permita determinar as seguintes grandezas vetoriais:
 - os vetores velocidade \vec{v}'_C e \vec{v}'_P imediatamente após o choque;
 - a velocidade angular $\vec{\omega}'$ do cilindro imediatamente após o choque;
 - as forças impulsivas reativas externas ao sistema cilindro/cunha/mola.

Indique claramente quais são as equações que compõem o sistema e quais são as incógnitas a determinar.

Resolução

(a) DCL (impulsos)



(1,0)

A partir do diagrama de corpo livre, apliquemos o TRI e o TMI onde pertinente:

TRI, cunha C:

$$m(\vec{v}'_C - \vec{v}_C) = (-I \sin \theta) \vec{i} + (I_C - I \cos \theta) \vec{j}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$m(v'_{cx}\vec{i} - \vec{0}) = -I\text{sen}\theta\vec{i} + (I_c - I\text{cos}\theta)\vec{j}$$

Então:

$$\vec{i}: v'_{cx} = -\frac{I}{m} \text{sen } \theta \quad (1) \quad (0,5)$$

$$\vec{j}: 0 = I_{cy} - I\text{cos}\theta \quad (2) \quad (0,5)$$

TRI, cilindro:

$$6m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \vec{0} = (X_G + I\text{sen } \theta)\vec{i} + (Y_G + I\text{cos}\theta)\vec{j}$$

$$\vec{i}: X_G = -I \text{sen } \theta \quad (3) \quad (0,5)$$

$$\vec{j}: Y_G = -I\text{cos}\theta \quad (4) \quad (0,5)$$

TMI, cilindro, G

$$J_G(\omega' - \omega)\vec{k} = \vec{M}_G^e \Rightarrow$$

$$J_G(\omega' - \omega)\vec{k} = (P - G) \wedge I(\text{sen}\theta\vec{i} + \text{cos}\theta\vec{j})$$

$$J_G(\omega' - \omega)\vec{k} = -r\vec{i} \wedge I(\text{sen}\theta\vec{i} + \text{cos}\theta\vec{j})$$

$$J_G(\omega' - \omega)\vec{k} = -rI\text{cos}\theta \vec{k} \quad (5) \quad (0,5)$$

Incógnitas: $I, I_{cy}, X_G, Y_G, v'_{cx}, \omega'$

Há 5 equações para 6 incógnitas. As equações adicionais são obtidas a partir da aplicação de hipótese de Newton e das relações cinemáticas devidas aos vínculos físicos:

- Hipótese de Newton:

$$(\vec{v}'_c - \vec{v}'_p) \cdot \vec{n} = -e(\vec{v}_c - \vec{v}_p) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = \text{sen}\theta\vec{i} + \text{cos}\theta\vec{j}$$

Temos:

. cunha

$$\vec{v}_c = \vec{0} \text{ (dado)}$$

$$\vec{v}'_c = v'_{cx}\vec{i};$$

. cilindro

$$\vec{v}_p = \omega\vec{k} \wedge (P - G) = \omega\vec{k} \wedge (-r\vec{i}) = -\omega r\vec{j}$$

$$\vec{v}'_p = \omega'\vec{k} \wedge (P - G) = \omega'\vec{k} \wedge (-r\vec{i})$$

$$\vec{v}'_p = -\omega' r\vec{j} \quad (6)$$

. Hipótese de Newton

$$(v'_{cx}\vec{i} - (-\omega' r\vec{j})) \cdot \vec{n} = -e(\vec{0} - (-\omega r\vec{j})) \cdot \vec{n} \Rightarrow$$

$$v'_{cx}\text{sen}\theta + \omega' r\text{cos}\theta = -e\omega r\text{cos}\theta \quad (7) \quad (0,5)$$

Percebe-se que surgem uma nova incógnita, \vec{v}'_p , além de duas equações, (6) e (7)



3ª Questão (2,0 pontos). No contexto da Mecânica Newtoniana, considere dois corpos rígidos e convexos, de massas m_1 e m_2 , respectivamente, transladando-se com velocidades uniformes v_1 e v_2 ($v_1 > v_2$). Considere um choque central, direto e sem atrito entre estes dois corpos, caracterizado por um coeficiente de restituição e . É assim possível deduzir a seguinte expressão para o cálculo da perda de energia cinética do sistema devida ao choque:

$$\Delta T = T_{in} - T_{fin} = \frac{1}{2} m_R (1 - e^2) (v_2 - v_1)^2, \text{ onde } m_R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ é conhecida como "massa reduzida".}$$

Considere então as seguintes assertivas e, *analisando-as uma a uma, responda se são corretas ou incorretas, justificando as respostas dadas.*

a) A variação de velocidade do centro de massas dos corpos é dada pela expressão

$$\Delta v_i = \frac{m_j}{m_i + m_j} (1 + e) (v_j - v_i); \quad i, j = 1, 2.$$

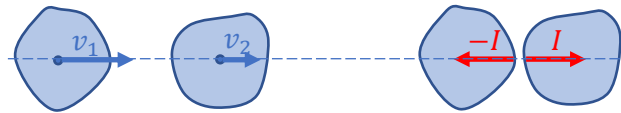
b) O choque perfeitamente plástico é aquele em que $e = 0$, caso em que a perda de energia cinética é mínima.

c) Se $m_j \ll m_i$, então $\Delta v_i \cong \left(\frac{m_j}{m_i}\right) (1 + e) (v_j - v_i)$.

d) Não há perda de energia cinética no choque perfeitamente elástico.

RESOLUÇÃO

Item a. Tomaremos como referência a figura abaixo, que ilustra os instantes de aproximação e choque entre dois corpos rígidos, inicialmente em movimento de translação.



Aplicando-se o TRI a ambos os corpos, tem-se:

$$m_1 (v'_1 - v_1) = -I \Rightarrow v'_1 = v_1 - \frac{I}{m_1} \quad (1)$$

$$m_2 (v'_2 - v_2) = I \Rightarrow v'_2 = v_2 + \frac{I}{m_2} \quad (2)$$

Aplicando-se a equação empírica do choque sem atrito, baseada na hipótese de Newton, tem-se:

$$v'_1 - v'_2 = -e(v_1 - v_2) \quad (3)$$

Substituindo-se (1) e (2) em (3), tem-se:

$$v_1 - \frac{I}{m_1} - \left(v_2 + \frac{I}{m_2}\right) = -e(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 - I \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = -e(v_1 - v_2)$$
$$\Rightarrow I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + e) (v_1 - v_2) \quad (4)$$

Substituindo-se (4) em (1) e em (2) e lembrando que, de acordo com enunciado do problema, $v_1 > v_2$, tem-se:



Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + e)(v_2 - v_1) \\ \Delta v_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + e)(v_1 - v_2)\end{aligned}\tag{5}$$

Vê-se, então, que as equações (5) podem ser escritas na forma

$$\Delta v_i = \frac{m_j}{m_i + m_j} (1 + e)(v_j - v_i); \quad i, j = 1, 2$$

Logo, a assertiva **a** é correta.

(a) 0,5

Item (b). Choque perfeitamente plástico.

Substituindo-se os valores extremos de e (ou seja, 0 e 1) na expressão da variação da energia cinética fornecida no enunciado e abaixo replicada

$$\Delta T = T_{in} - T_{fin} = \frac{1}{2} m_R (1 - e^2) (v_2 - v_1)^2$$

Tem-se:

$$\Delta T(e = 0) = \frac{1}{2} m_R (v_2 - v_1)^2$$

$$\Delta T(e = 1) = 0$$

Assim, conclui-se que, quando $e = 0$, ao contrário do que a assertiva (b) enuncia, a perda de energia cinética é máxima, ou seja, **b** é uma assertiva falsa.

(b) 0,5

Item c. Caso em que $m_j \ll m_i$

Expressando-se Δv_i como

$$\Delta v_i = \frac{m_j}{m_i \left(1 + \frac{m_j}{m_i}\right)} (1 + e)(v_j - v_i)$$

Vê-se que, quando $m_j \ll m_i$, obtém-se a seguinte expressão aproximada de Δv_i :

$$\Delta v_i \approx \frac{m_j}{m_i} (1 + e)(v_j - v_i)$$

Portanto, a assertiva **c** é correta.

(c) 0,5

Item d. Choque perfeitamente elástico

Conforme já mostrado no item (b), quando $e = 0$, a perda de energia cinética é nula; logo, a assertiva **e** é correta.

(d) 0,5



4ª Questão (Bônus: Vale 1,0 ponto, desde que a nota não ultrapasse 10 pontos). Resolva o sistema de equações do item **b** da 2ª Questão. **Obs:** 0,5 ponto, se somente indicar os passos para a solução, ou 1,0 ponto, se a solução estiver completa e correta.

Solução das equações

de (1) em (7):

$$-\frac{I}{m} \operatorname{sen}^2 \theta + \omega' r \cos \theta = -e \omega r \cos \theta$$

$$I = \frac{m(\omega' + e\omega) r \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \quad (7')$$

(7') em (5):

$$J_G(\omega' - \omega) = -r \frac{m(\omega' + e\omega) r \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta$$

$$\frac{6mr^2}{2}(\omega' - \omega) = -\frac{m(e\omega + \omega')r^2 \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$3(\omega' - \omega) \operatorname{sen}^2 \theta = -(e\omega + \omega') \cos^2 \theta$$

$$\omega'(3 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = \omega(3 \operatorname{sen}^2 \theta - e \cos^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \omega' = \omega \frac{(3 \operatorname{sen}^2 \theta - e \cos^2 \theta)}{(3 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

Por simplicidade, daqui em diante, façamos

$$K = \frac{(3 \operatorname{sen}^2 \theta - e \cos^2 \theta)}{(3 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

Continuando

$\omega' = K\omega$ em (7):

$$v'_{cx} \operatorname{sen} \theta + K\omega r \cos \theta = -e\omega r \cos \theta$$

$$\vec{v}'_{cx} = -\frac{\omega r \cos \theta (e + K)}{\operatorname{sen} \theta} \vec{i}$$

$\omega' = K\omega$ em (7'):

$$I = \frac{mr\omega \cos \theta (e + K)}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

I em (3) e (4):

$$X_G = -\frac{mr\omega \cos \theta (e + K)}{\operatorname{sen} \theta}, \quad Y_G = -\frac{mr\omega \cos^2 \theta (e + K)}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

I em (2):

$$I_{cy} = \frac{mr\omega \cos^2 \theta (e + K)}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

Finalmente, ω' em (6):

$$\vec{v}'_p = -K\omega r \vec{j}$$