

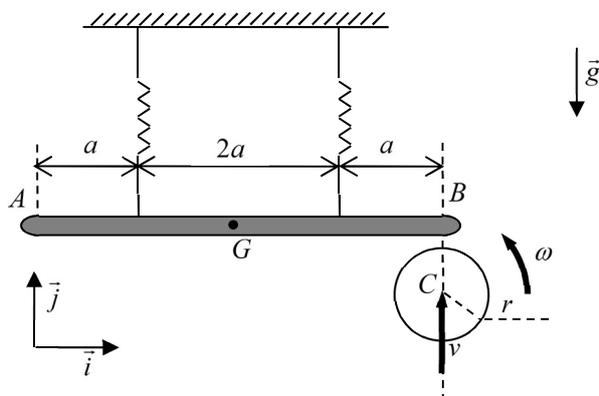


MECÂNICA II - PME 3200 – Segunda Prova – 14 de maio de 2019

Duração da prova: 110 minutos (não é permitido o uso de celulares, notebooks e dispositivos similares)

1ª Questão (3,5 pontos). Na figura mostra-se um disco de massa m e raio r realizando movimento ascendente, na iminência de se chocar contra a extremidade B de uma barra delgada AB de massa $2m$ e comprimento $4a$, mantida horizontal por dois cabos elásticos de massa desprezível. No instante do choque, a velocidade do centro de massa C do disco é $v\vec{j}$ e a velocidade angular do disco é $\omega\vec{k}$.

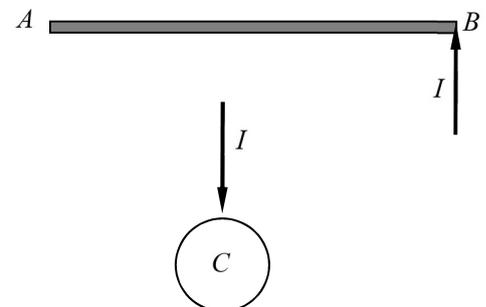
Desprezando o efeito do atrito no contato entre as superfícies do disco e da barra e supondo-se conhecido o coeficiente de restituição e referente a essas superfícies, pede-se:



- desenhar os diagramas de impulsos para a barra e para o disco;
- formular o problema de choque, escrevendo as equações requeridas e organizando-as, ao final, em um sistema de equações.
- determinar os estados cinemáticos do disco (v'_C, ω') e da barra (v'_G, Ω') imediatamente após o choque;

Resolução

Os diagramas de impulsos solicitados são apresentados na figura ao lado.



Resposta (a): 1 ponto

Da equação do Teorema da Resultante dos Impulsos, aplicada aos movimentos da barra e do disco, obtêm-se:

$$2m(\bar{v}'_G - \vec{0}) = I\vec{j} \Rightarrow \bar{v}'_G = \frac{I}{2m}\vec{j} \quad (1)$$

e

$$m(\bar{v}'_C - v\vec{j}) = -I\vec{j} \Rightarrow \bar{v}'_C = \left(v - \frac{I}{m}\right)\vec{j} \quad (2)$$

(1/2 ponto)

Da equação do Teorema do Momento dos Impulsos, aplicada aos movimentos da barra e do disco, resultam:



$$J_{Gz}(\Omega' \vec{k} - \vec{0}) = (B - G) \wedge I \vec{j} = 2a \vec{i} \wedge I \vec{j} = 2aI \vec{k}$$
$$\therefore \Omega' = \frac{2a}{J_{Gz}} I = \frac{2a}{\frac{2m(4a)^2}{12}} I = \frac{3}{4ma} I \quad (3)$$

e

$$J_{Cz}(\omega' \vec{k} - \omega \vec{k}) = \vec{0}$$
$$\therefore \omega' = \omega \quad (4)$$

(½ ponto)

Estendendo-se o escopo de aplicação da hipótese de Newton ao caso de choque excêntrico entre dois corpos tem-se, na ausência de atrito:

$$u' = -e \cdot u \quad (5)$$

onde u e u' são, respectivamente, as projeções, na direção da normal de choque, das velocidades de aproximação e de afastamento dos pontos dos corpos que entram em contato durante o evento de choque.

Imediatamente antes de ocorrer o choque, a velocidade do ponto B' da periferia do disco que está na iminência de tocar a superfície da barra, é dada por:

$$\vec{v}_{B'} = v \vec{j} + \omega \vec{k} \wedge r \vec{j} = v \vec{j} - \omega r \vec{i} \quad (6)$$

Portanto, a velocidade de aproximação entre os pontos B' do disco e B da barra, é:

$$u = (\vec{v}_B - \vec{v}_{B'}) \cdot \vec{j} = (\vec{0} - v \vec{j}) \cdot \vec{j} = -v \quad (7)$$

Imediatamente após o choque, a velocidade de afastamento desses pontos será:

$$u' = -eu = ev \quad (8)$$

Notemos que

$$u' = (\vec{v}'_B - \vec{v}'_{B'}) \cdot \vec{j} = [(\vec{v}'_G + \Omega' \vec{k} \wedge (B - G)) - (\vec{v}'_C + \omega' \vec{k} \wedge (B' - C))] \cdot \vec{j} = ev \quad (9)$$

(1 ponto)

Assim, substituindo-se (1), (2) e (3) em (9), resulta:

$$\frac{I}{2m} + \left(\frac{3I}{2m}\right) - \left(v - \frac{I}{m}\right) = ev \Rightarrow 3 \frac{I}{m} = v(1+e) \Rightarrow I = \frac{1}{3}(1+e)mv \quad (9)$$

Substituindo-se (9) nas equações (1) a (4) obtêm-se, finalmente, os estados cinemáticos do disco e da barra imediatamente após a colisão:

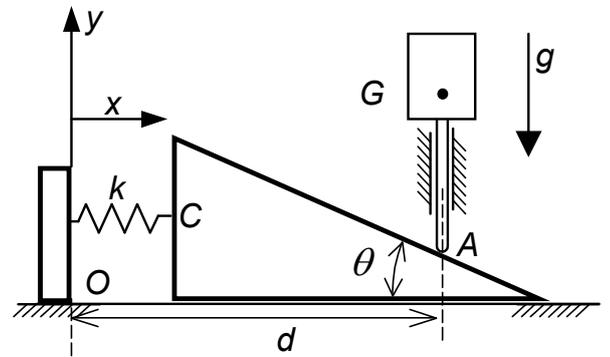
$$\text{Barra: } \vec{v}'_G = \frac{1}{6}(1+e)v \vec{j} \quad \text{e} \quad \Omega' = \frac{1}{4}(1+e)\frac{v}{a}$$

$$\text{Disco: } \vec{v}'_C = \frac{2-e}{3}v \vec{j} \quad \text{e} \quad \omega' = \omega$$

(½ ponto)



2ª Questão (3,5 pontos). Considere o sistema composto por uma cunha triangular, uma haste e um bloco, conforme mostrado na figura. A cunha está apoiada sobre um plano horizontal e desliza sem atrito. Uma mola horizontal de rigidez k e comprimento livre L , tem sua extremidade C fixada na cunha. O conjunto solidário formado pela haste e o bloco tem massa total m e centro de massa G . A haste desliza sem atrito na guia vertical fixa na posição d . Não há atrito no contato A entre a haste e a cunha. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais pede-se :



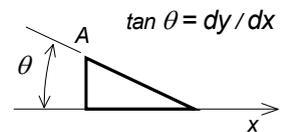
Resolução

a) Relacione os deslocamentos virtuais dos pontos G e C com o deslocamento virtual δx da cunha. Os deslocamentos virtuais são:

Para o ponto G : $(G - O) = d \vec{i} + [y + (G - A)] \vec{j}$

Diferenciando obtêm-se $dG = dy \vec{j}$ mas $dy = \tan \theta dx \Rightarrow$

$\delta G = \tan \theta \delta x$



1 ponto

Para o ponto C tem-se: $\delta C_x = \delta x$

½ ponto

b) Determinar a posição x de equilíbrio da cunha:

Utilizando o PTV:

$\delta W = \vec{F}_m \cdot \delta C + (m\vec{g}) \cdot \delta G = -k \cdot (x - L) \cdot \delta C_x - mg \cdot \delta G = 0$

1 ponto

A força na mola é dada por: $\vec{F}_m = -k \cdot (x - L) \vec{i}$

½ ponto

$-k \cdot (x - L) \delta x - mg \tan \theta \cdot \delta x = 0 \Rightarrow x = L - \frac{mg \tan \theta}{k}$

½ ponto

**3ª Questão (1,0 ponto)**

- (a) Distinga *deslocamento virtual* de *deslocamento real*;
(b) Represente, em espaço de estados, a equação diferencial de segunda ordem: $\ddot{x} + 2\eta\dot{x} + x + \varepsilon x^3 = f(t)$, onde η e ε são parâmetros constantes.

Resolução**(a) Deslocamento virtual versus deslocamento real**

Para melhor explicar a distinção entre *deslocamento virtual* e *deslocamento real* consideraremos um sistema mecânico constituído por m partículas materiais sujeitas a p equações vinculares da forma

$$\bar{P}_i = \bar{P}_i(q_1, \dots, q_n), i = 1, \dots, p \quad (1)$$

sistema esse, portanto, dotado de $n = m - p$ graus de liberdade.

Suporemos ainda que cada uma das m partículas materiais P_i esteja sujeita à ação de uma força externa \bar{F}_i .

Nessas condições, a menos que o sistema esteja em equilíbrio, ou seja, que

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i = \vec{0} \quad (2)$$

e

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^m (P_i - O) \wedge \bar{F}_i = \vec{0}, \quad \forall \text{ pólo } O, \quad (3)$$

as posições das partículas se alterarão ao longo do tempo, em conformidade com as equações do Teorema da Resultante e do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, ou seja,

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^m \bar{F}_i = m\bar{a}_G \quad (4)$$

$$\bar{M}_O = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^m (P_i - O) \wedge m_i \bar{v}_i \right] + \bar{v}_O \wedge m\bar{v}_G \quad (5)$$

Observe-se que, durante qualquer intervalo de tempo infinitesimal dt , as m partículas materiais do sistema sofrerão deslocamentos reais $d\bar{P}_i$ que respeitarão tanto as equações (4) e (5) quanto as p equações vinculares (1) mencionadas anteriormente.

Dessa forma, identificamos em um deslocamento real $d\bar{P}_i$ as seguintes características: a) respeito às equações da Dinâmica; 2) respeito às equações vinculares; c) transcurso durante um intervalo de tempo infinitesimal dt .

Analisaremos agora a situação em que o sistema material está em equilíbrio, respeitando, portanto, as equações (2) e (3). Nessas condições, o Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que "a resultante do trabalho virtual realizado pelo sistema de forças \bar{F}_i é nulo, para deslocamentos virtuais $\delta\bar{P}_1, \dots, \delta\bar{P}_m$ arbitrários".

Os deslocamentos referidos nesse Princípio fundamental da Mecânica diferem, radicalmente, dos deslocamentos reais, pois: a) não respeitam, necessariamente, as equações da Dinâmica; b) não respeitam, necessariamente, as equações vinculares; c) realizam-se mediante um processo de simulação geométrica, sem levar em consideração o transcurso do tempo.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

É por esse motivo que são denominados *deslocamentos virtuais*.

É importante destacar que, em um problema de Estática no qual se deseja determinar uma configuração de equilíbrio do sistema mecânico, é conveniente utilizar deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos, pois, se estes forem ideais, as forças internas não realizarão trabalho, facilitando o equacionamento do problema. No entanto, se a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais tem em vista a determinação das reações e/ou as forças internas, será forçoso que se utilizem deslocamentos virtuais incompatíveis com os vínculos.

(½ ponto)

(b) Representação em espaço de estados

Nessa forma de representação, a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} = -2\eta\dot{x} - x - \varepsilon x^3 + f(t)$$

é transformada no seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

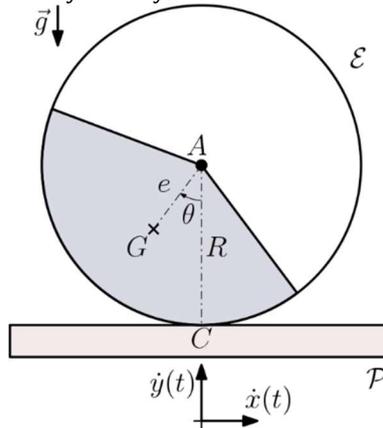
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2\eta y_2 - y_1 - \varepsilon y_1^3 + f(t) \end{cases}$$

(½ ponto)

4ª Questão (3,0 pontos). Conforme proposto na *Parte 2 do EMSC 2019*, a placa plana \mathcal{P} , sobre a qual pode rolar sem escorregar o corpo cilíndrico ε , realiza um ato de translação puro, em atitude horizontal,



com velocidade $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$ (medida com respeito a um referencial inercial), com $\dot{x}(t) = A_x\omega_x\sin(\omega_x t + \phi_x)$ e $\dot{y}(t) = A_y\omega_y\sin(\omega_y t + \phi_y)$.



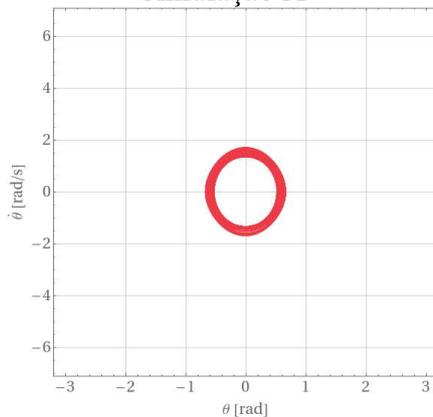
A tabela a seguir lista alguns dos cenários propostos para análise:

Cenário	$\dot{x}(t)$			$\dot{y}(t)$		
	A_x	ω_x	ϕ_x	A_y	ω_y	ϕ_y
2.2	$1.25R$	$1.0 \omega_n$	0	0		
2.3	$1.25R$	$2.0 \omega_n$	0	0		
2.4	0			$1.25R$	$1.0 \omega_n$	0
2.5	0			$1.25R$	$2.0 \omega_n$	0

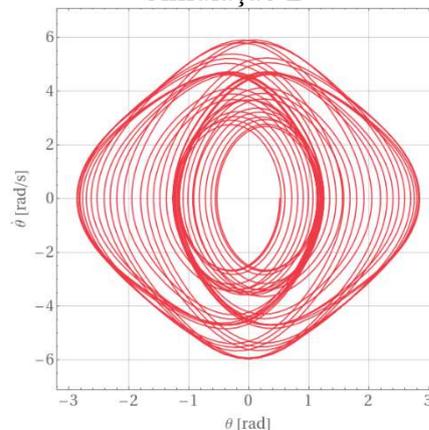
Em todos eles, foram adotados os seguintes parâmetros e condições iniciais: $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $R = 0.30 \text{ m}$, $e = 0.20 R$, $\theta(0) = \pi/6 \text{ rad}$ e $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$.

Identifique para as simulações A e B, ilustradas nos gráficos abaixo, o respectivo cenário, apresentando uma justificativa e fornecendo uma descrição da resposta dinâmica observada em cada caso (destacando a influência do movimento imposto à placa e das condições iniciais propostas).

Simulação A



Simulação B



Construa na folha de respostas uma tabela de correspondência, conforme modelo abaixo.

Simulação	Cenário	Justificativa e descrição
A	2. _	
B	2. _	

Resolução



Simulação	Cenário	Justificativa e descrição
A	2.4 (0,5)	Neste cenário, não se observa a manifestação de nenhum fenômeno ressonante, sendo a dinâmica dominada pela resposta às condições iniciais do problema, como pode ser notado analisando as amplitudes de movimento e o formato da trajetória no espaço de fase. O efeito da translação vertical harmônica da placa é de uma pequena perturbação no período de oscilações do corpo cilíndrico. Por este motivo, a resposta observada é ligeiramente distinta de uma resposta estritamente periódica. (1,0)
B	2.2 (0,5)	Neste cenário, a placa realiza uma translação horizontal harmônica com frequência idêntica à frequência natural do modelo linearizado, ocorrendo o fenômeno de ressonância fundamental. Observa-se uma sobreposição dos efeitos das respostas a condições iniciais e ao termo forçante (decorrente do movimento imposto à placa), havendo uma predominância da segunda, conforme se verifica a partir da análise das amplitudes do movimento. Devido à não-linearidade do modelo, esta sobreposição de efeitos não resulta em uma resposta de natureza puramente periódica. (1,0)