

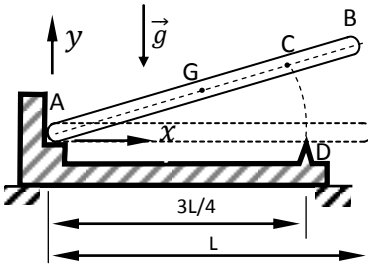


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – P2 – 22 de maio de 2018

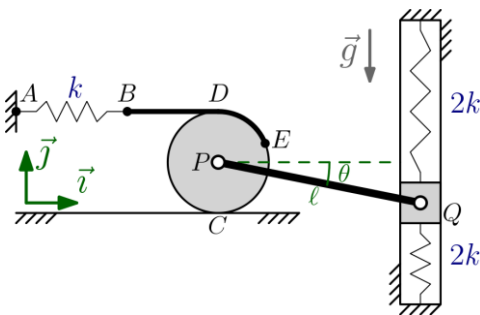
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de celulares, notebooks e dispositivos similares)



1ª. Questão (3,5 pontos). A barra homogênea delgada **AB**, de massa **m** e comprimento **L**, está apoiada em sua extremidade **A** sobre um suporte sem atrito e efetua rotação no sentido horário sem que haja perda de contato com esse suporte. Quando ela está na iminência de se chocar com o anteparo em **D**, possui velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ com respeito ao sistema de coordenadas representado na figura. Sabe-se, ainda, que **C** é o ponto da barra que entra em contato com **D**, que o choque ocorre sem atrito com coeficiente de restituição $e = 1/2$ e que, imediatamente após o choque, a barra possui velocidade angular nula. Nessas condições, solicita-se, para a barra **AB**:

- desenhar o diagrama de forças impulsivas no instante do choque com o anteparo;
- obter a velocidade do centro de massa **G** imediatamente após o choque;
- obter os impulsos reativos em **A** e em **C**.

Questão bônus (1 ponto) Na questão no. 1, se o choque ocorresse no centro de percussão da barra, com as mesmas condições imediatamente antes desse evento, a velocidade angular da barra imediatamente após o choque poderia ser nula? Justifique sua resposta com base nos conceitos da dinâmica.



2ª. Questão (3,5 pontos). Considere o sistema mecânico mostrado na figura, constituído por um disco rígido de centro **P**, uma barra rígida **PQ**, um bloco **Q**, um cabo ideal **BDE** e três molas lineares ideais. A barra **PQ** tem massa desprezível e comprimento ℓ . O bloco **Q** tem massa **m** e pode deslizar sem atrito no interior da guia vertical, estando vinculado a duas molas idênticas, cada uma com rigidez $2k$. O disco de centro **P** está em contato com uma superfície plana (ponto **C**), podendo rolar sem escorregar sobre esta. A extremidade **B** do cabo está presa a uma

mola de rigidez **k**. A extremidade **E** do cabo **BDE** está fixa à periferia do disco. O trecho **DE** do cabo enrola-se sem escorregar sobre a periferia; o trecho retilíneo **BD**, por sua vez, a tangencia horizontalmente. A configuração do sistema pode ser descrita pelo ângulo θ medido entre a direção da barra **PQ** e a horizontal, como indicado na figura. Sabendo que as três molas ficam em configuração não-deformada quando $\theta = 0$ (barra **PQ** na posição horizontal), pede-se:

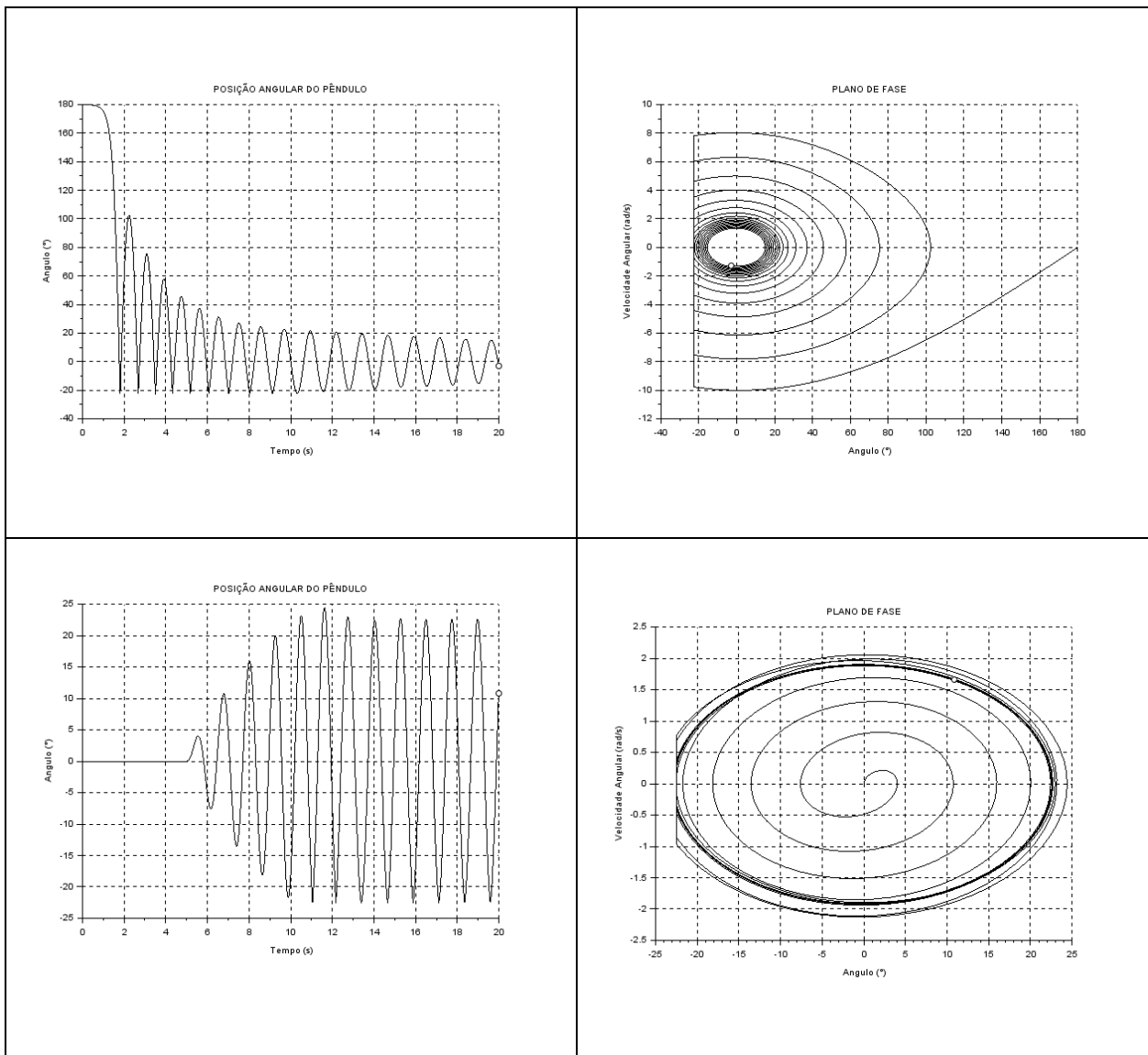
- os deslocamentos virtuais das abscissas dos pontos **B**, **C**, **D**, **P** e da ordenada do ponto **Q**;
- os trabalhos virtuais da força peso do bloco **Q**, da força elástica na mola **AB**, das forças elásticas do par de molas no interior da guia vertical e da força de atrito de rolamento no disco;
- utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determine o valor de θ na configuração de equilíbrio estático do sistema.

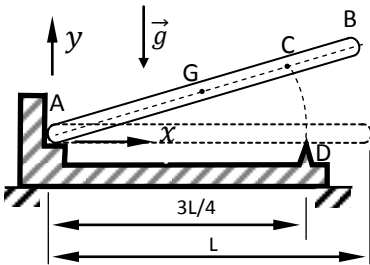


ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). Baseado nas simulações sugeridas no EMSC#2 de 2018, os gráficos abaixo apresentam duas histórias temporais do movimento com impacto (gráficos à esquerda) e duas projeções de trajetórias de fase no plano $(\theta, \dot{\theta})$ do sistema amortecido (gráficos à direita). Para o Caso 1 (gráficos superiores) foram utilizadas as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \pi - 0,001$ rad; $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s, $c_\theta = 0,002$ Nms/rad e batente com coeficiente de restituição $e = 0,8$. Para o Caso 2 (gráficos inferiores) foram utilizadas as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = 0,0$; $\dot{\theta}(0) = 0,0$; momento externo $\vec{M}^{\text{ext}} = M_0 \sin(\omega_m t + \phi) \vec{k}$, com magnitude $M_0 = 0,03$ Nm, frequência $\omega_m = 1,0 \omega_n$, fase $\phi = 0$ e $c_\theta = 0,01$ Nms/rad. Para cada simulação (Caso 1 e Caso 2), descreva o movimento, analise e interprete os resultados utilizando conceitos da dinâmica.





1ª. Questão (3,5 pontos). A barra homogênea delgada **AB**, de massa **m** e comprimento **L**, está apoiada em sua extremidade **A** sobre um suporte sem atrito e efetua rotação no sentido horário sem que haja perda de contato com esse suporte. Quando ela está na iminência de se chocar com o anteparo em **D**, possui velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ com respeito ao sistema de coordenadas representado na figura. Sabe-se, ainda, que **C** é o ponto da barra que entra em contato com **D**, que o choque ocorre sem atrito, com coeficiente de restituição $e = 1/2$ e que, imediatamente após o choque, a barra possui velocidade angular nula. Nessas condições, solicita-se, para a barra **AB**:

- desenhar o diagrama de forças impulsivas no instante do choque com o anteparo;
- obter a velocidade do centro de massa **G** imediatamente após o choque;
- obter os impulsos reativos em A e em C.

Solução



(b) Para obter \vec{v}'_G , vamos utilizar a hipótese de Newton para calcular \vec{v}'_C e a equação do campo de velocidades de um corpo rígido:

$$(\vec{v}'_C - \vec{v}'_D) \cdot \vec{j} = -e(\vec{v}_C - \vec{v}_D) \cdot \vec{j} \quad (1) \quad (0,5)$$

Velocidade do ponto C (ponto da barra que atinge D) imediatamente antes do impacto:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (C - A) \\ \vec{v}_C &= \vec{0} + (-\omega\vec{k}) \wedge \left(\frac{3L}{4}\vec{i}\right) = -\frac{3L}{4}\omega\vec{j} \end{aligned} \quad (2), \text{ em (1):}$$

$$v'_C - 0 = -\frac{1}{2}(v_C - 0) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3L}{4}\omega\right) = \frac{3L}{8}\omega \quad (3) \text{ (note que } \vec{v}'_D = \vec{v}_D = \vec{0} \text{ pois D é um ponto no anteparo fixo).}$$

Como, imediatamente após o choque a velocidade angular é nula (dado do problema),

$$\omega' = 0 \Rightarrow \vec{v}'_G = \vec{v}'_C = \frac{3L}{8}\omega\vec{j} \quad (4) \quad (0,5)$$

(c) Para obter os impulsos mostrados no diagrama acima, vamos aplicar o Teorema da Resultante dos Impulsos (TRI) e o Teorema do Momento dos Impulsos (TMI):

TRI:

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = I_{Ax}\vec{i} + (I_{Ay} + I_C)\vec{j} \quad (5) \quad (0,5)$$

Velocidade do centro de massa imediatamente antes do choque:

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) \\ \Rightarrow \vec{v}_G &= \vec{0} + (-\omega\vec{k}) \wedge \left(\frac{L}{2}\vec{i}\right) = -\frac{\omega L}{2}\vec{j} \end{aligned} \quad (6) \quad (0,5)$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Como tanto \vec{v}'_G e \vec{v}_G possuem direção vertical e dado que o choque ocorre sem atrito, decorre imediatamente de (5) que

$$I_{A_x} = 0 \quad (7)$$

Apliquemos, agora, o TMI à barra, polo C, :

$$m(G - C) \wedge (\vec{v}'_C - \vec{v}_C) + J_{C_z} (\omega' - \omega) \vec{k} = (A - C) \wedge I_{A_y} \vec{j} \quad (8) \quad (0,5)$$

Utilizando (2) e (3) em (8), já considerando a condição dada $\omega' = 0$:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{L}{2} - \frac{3L}{4} \right) \vec{i} \wedge \omega \left(\frac{3L}{8} + \frac{3L}{4} \right) \vec{j} + \left(\frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} - \frac{3L}{4} \right)^2 \right) \omega \vec{k} &= \left(-\frac{3L}{4} \vec{i} \right) \wedge I_{A_y} \vec{j} \\ -m \frac{L}{4} \vec{i} \wedge \left(\omega \frac{9L}{8} \vec{j} \right) + \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{L^2}{16} \right) \omega \vec{k} &= -\frac{3L}{4} I_{A_y} \vec{k} \\ \vec{k}: \left(-\frac{9mL^2}{8} + \frac{mL^2}{3} + \frac{mL^2}{4} \right) \omega &= -3L I_{A_y} \\ -\frac{13mL^2}{24} \omega &= -3L I_{A_y} \\ \Rightarrow \vec{I}_A = \frac{13}{72} mL\omega \vec{j} \end{aligned} \quad (9) \quad (0,5)$$

Utilizando os resultados de (4), (6), (7) e (9) em (5), obtemos o impulso em C:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{3L}{8} \omega - \left(-\frac{L}{2} \omega \right) \right) \vec{j} &= \left(\frac{13}{72} mL\omega + I_C \right) \vec{j} \\ \left(\frac{7mL}{8} - \frac{13mL}{72} \right) \omega &= I_C \Rightarrow \vec{I}_C = \frac{50}{72} mL\omega \vec{j} \end{aligned} \quad (10)$$

Para a resolução deste item de maneira alternativa, o TMI poderia ter sido calculado em relação a um outro polo, por exemplo, o centro de massa ou mesmo o polo A. Pelo centro de massa teríamos:

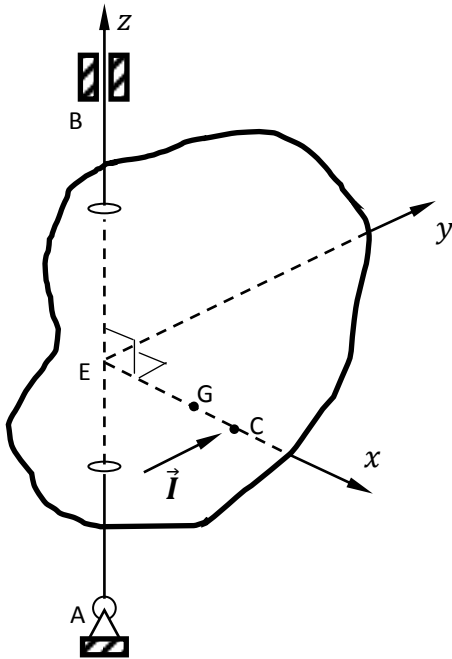
$$\begin{aligned} J_{G_z} (\omega' - \omega) \vec{k} &= (A - G) \wedge I_{A_y} \vec{j} + (C - G) \wedge I_C \vec{j} \\ \frac{mL^2}{12} \omega \vec{k} &= -\frac{L}{2} \vec{i} \wedge I_{A_y} \vec{j} + \frac{L}{4} \vec{i} \wedge I_C \vec{j} = \left(-\frac{L}{2} I_{A_y} + \frac{L}{4} I_C \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (11)$$

Utilizando o resultado em (7), resolve-se (5) e (11) para I_{A_y} e I_C obtendo-se os mesmos resultados anteriores.



Questão bônus (1 ponto) Na questão no. 1, se o choque ocorresse no centro de percussão da barra, com as mesmas condições imediatamente antes desse evento, a velocidade angular da barra imediatamente após o choque poderia ser nula? Justifique sua resposta com base nos conceitos da dinâmica.

Solução

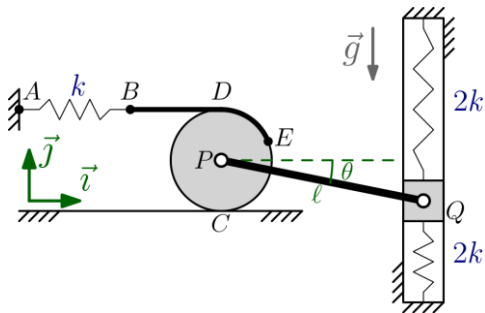


Não. Suponha um corpo rígido qualquer (que não necessariamente apresente algum tipo de simetria material) que possa girar livremente em torno de um eixo fixo (z , na figura), vinculado através de um anel e de uma articulação, ambos ideais (sem atrito). Se o eixo de rotação for um eixo principal de inércia do corpo, demonstra-se que existe um centro de percussão (C , na figura) do corpo rígido relativamente a este eixo.

A aplicação, ao corpo rígido, de qualquer impulso ativo externo tal que (i) possua direção perpendicular ao plano formado pelo eixo de rotação e pela perpendicular baixada do centro de massa até ele; (ii) a linha de ação do impulso externo atinja este plano em um ponto C pertencente a essa perpendicular e cuja distância ao eixo de rotação dada seja dada por $\|C - E\| = \frac{J_{Ez}}{m\|(G-E)\|}$ (m =massa do corpo rígido), não irá causar a ocorrência de impulsos reativos nos vínculos.

Voltando ao caso da barra, o eixo imaginário de rotação A_z é um eixo principal de inércia. Assim, caso o impacto ocorra no centro de percussão, nenhum impulso reativo em A será aplicado à barra. Dessa forma, o impulso decorrente do choque em C irá

produzir um momento não nulo em relação a qualquer outro polo após esse evento, sem que haja outro impulso capaz de gerar um momento de sentido oposto de modo que a quantidade de movimento angular imediatamente após o choque seja nula e a barra execute um ato de movimento instantâneo de translação.



2ª. Questão (3,5 pontos). Considere o sistema mecânico mostrado na figura, constituído por um disco rígido de centro P, uma barra rígida PQ, um bloco Q, um cabo ideal BDE e três molas lineares ideais. A barra PQ tem massa desprezível e comprimento ℓ . O bloco Q tem massa m e pode deslizar sem atrito no interior da guia vertical, estando vinculado a duas molas idênticas, cada uma com rigidez $2k$. O disco de centro P está em contato com uma superfície plana (ponto C), podendo rolar sem escorregar sobre esta. A extremidade B do cabo está presa a uma

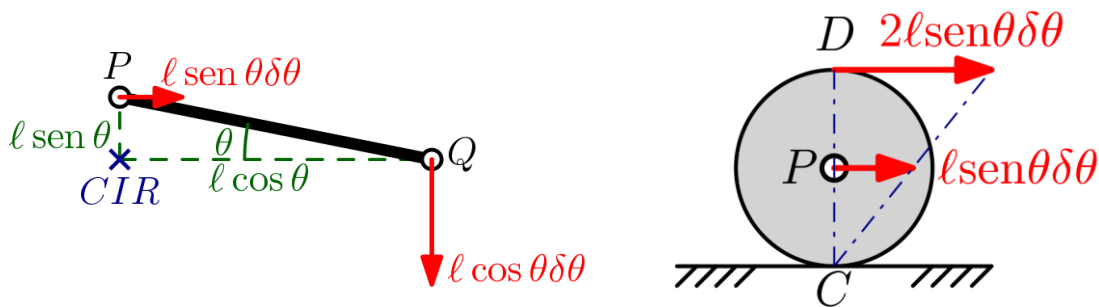
mola de rigidez k . A extremidade E do cabo BDE está fixa à periferia do disco. O trecho DE do cabo enrola-se sem escorregar sobre a periferia; o trecho retilíneo BD, por sua vez, a tangencia horizontalmente. A configuração do sistema pode ser descrita pelo ângulo θ medido entre a direção da barra PQ e a horizontal, como indicado na figura. Sabendo que as três molas ficam em configuração não-deformada quando $\theta = 0$ (barra PQ na posição horizontal), pede-se:

- (a) os deslocamentos virtuais das abscissas dos pontos B, C, D, P e da ordenada do ponto Q;
- (b) os trabalhos virtuais da força peso do bloco Q, da força elástica na mola AB, das forças elásticas do par de molas no interior da guia vertical e da força de atrito no disco;
- (c) utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determine o valor de θ na configuração de equilíbrio estático do sistema.

Solução

Se a barra PQ sofrer uma rotação $\delta\theta$, nota-se que as distâncias de seu centro instantâneo de rotação aos pontos P e Q são, respectivamente, $\ell \sin \theta$ e $\ell \cos \theta$. Logo (0,2 cada):

$$\begin{aligned} \delta x_P &= \ell \sin \theta \delta\theta \\ \delta y_Q &= -\ell \cos \theta \delta\theta \end{aligned}$$



Ainda, como o ponto C é o centro instantâneo de rotação do disco (0,2 cada):

$$\begin{aligned} \delta x_C &= 0 \\ \delta x_D &= 2 \delta x_P = 2\ell \sin \theta \delta\theta \end{aligned}$$

Finalmente, sendo o cabo BDE inextensível e, sabendo que o trecho retilíneo do cabo permanece na horizontal (0,2):

$$\delta x_B = \delta x_D = 2\ell \sin \theta \delta\theta$$

A força peso do bloco Q é dada por $-mg\vec{j}$, logo (0,5):

$$\delta W_{\text{peso } Q} = -mg \delta y_Q = mg\ell \cos \theta \delta\theta$$

A deflexão da mola AB pode ser calculada a partir do deslocamento do ponto B a partir da posição $\theta = 0$ (com a barra PQ na horizontal) até a configuração apresentada. Sabendo que a relação 2:1 entre os deslocamentos infinitesimais dos pontos B (extremidade do cabo) e P (centro do disco) permanece válida para qualquer configuração do sistema, é possível afirmar que a mesma se estende para qualquer deslocamento finito. Assim, a força elástica na mola AB é dada por:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{F}_{\text{mola AB}} = -k [x_B(\theta) - x_B(0)] \vec{i} = -k [2(x_P(\theta) - x_P(0))] \vec{i} = -2k(\ell - \ell \cos \theta) \vec{i}$$

O trabalho virtual desta força é, portanto, dado por (0,5):

$$\delta W_{\text{mola AB}} = -2k\ell(1 - \cos \theta) \delta x_B = -4k\ell^2(1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta$$

O módulo da deflexão de cada uma das molas da guia vertical é $\ell \sin \theta$. A força resultante exercida pelo par de molas sobre o bloco Q é dada por $+2(2k\ell \sin \theta) \vec{j}$ e o correspondente trabalho virtual é (0,5):

$$\delta W_{\text{molas guia}} = 2(2k\ell \sin \theta) \delta y_Q = -4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta \delta \theta$$

A força de atrito de rolamento sobre o disco é aplicada no ponto C, na direção horizontal. Como $\delta x_C = 0$, então (0,5):

$$\delta W_{\text{atrito rolamento}} = 0$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, temos:

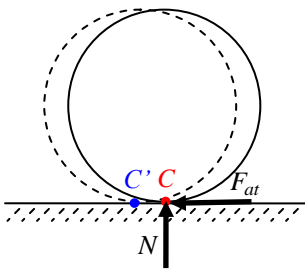
$$\delta W = \delta W_{\text{peso Q}} + \delta W_{\text{mola AB}} + \delta W_{\text{molas guia}} + \delta W_{\text{atrito rolamento}} = 0$$

$$\delta W = mg\ell \cos \theta \delta \theta - 4k\ell^2(1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta - 4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta \delta \theta = 0$$

$$\delta W = [mg\ell \cos \theta - 4k\ell^2 \sin \theta] \delta \theta = 0$$

Portanto, o valor de θ na configuração de equilíbrio do sistema é dado por (0,5):

$$\tan \theta = \frac{mg}{4k\ell} \Leftrightarrow \theta = \arctg \left[\frac{mg}{4k\ell} \right]$$



Obs: Como a força de contato $\vec{F} = -F_{at} \vec{i} + N \vec{j}$ entre o disco e o plano horizontal é aplicada a uma sucessão de pontos distintos C, C', C'',... etc (vide figura abaixo) e não a um ponto fixo e único do disco, o trabalho virtual devido a essa força, rigorosamente, deve ser calculado considerando-se um experimento virtual onde se impõe ao corpo um campo de velocidades virtuais compatível com os vínculos, em lugar de um conjunto de deslocamentos virtuais compatíveis com esses mesmos vínculos.

Como o disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, o campo de velocidades virtuais compatível com o vínculo 'rolamento sem escorregamento'

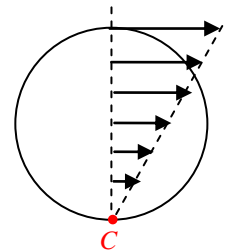
é o ilustrado na figura à direita.

Isso posto, o trabalho virtual devido à força de contato é dado por

$$\delta \tau = (\vec{F} \cdot \vec{v}_C) dt,$$

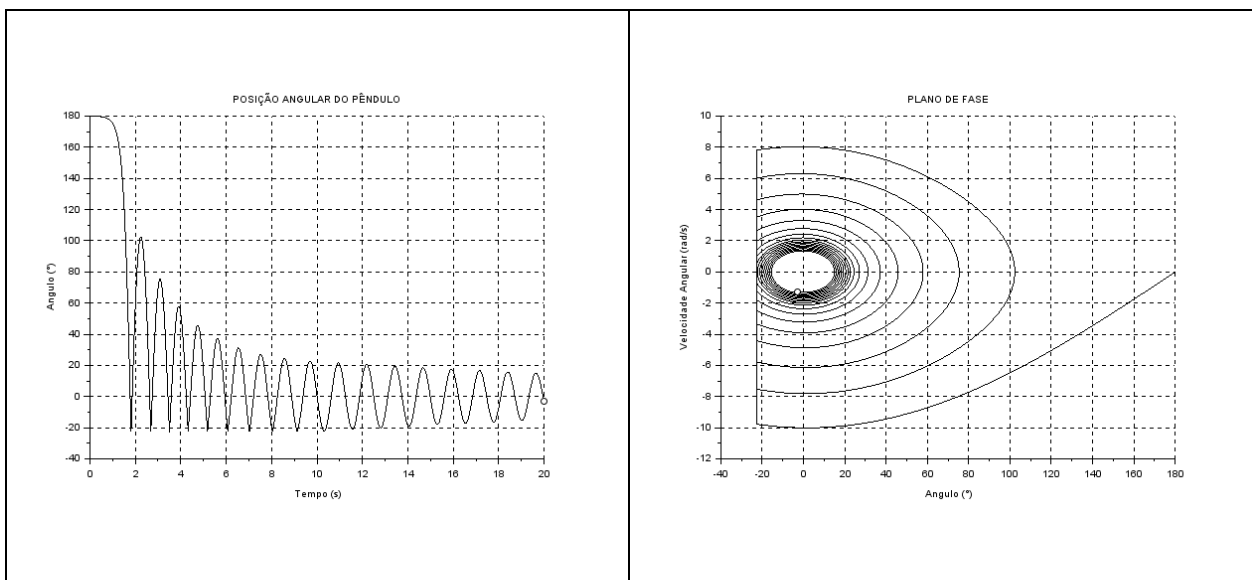
em que \vec{v}_C é a velocidade virtual do ponto de contato.

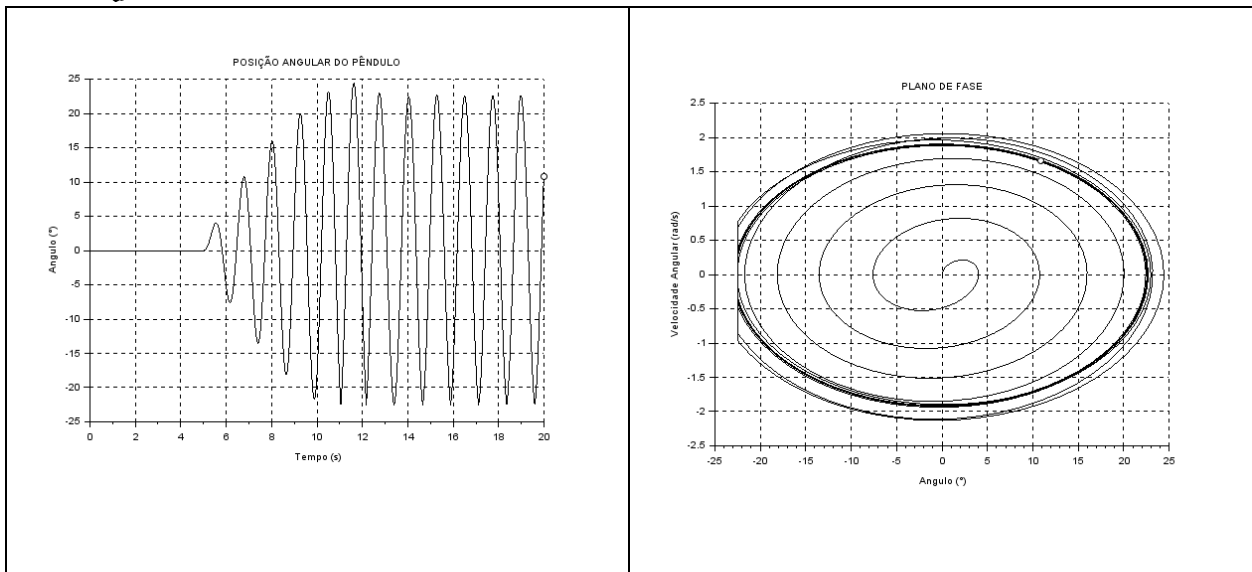
Como $\vec{v}_C = \vec{0}$, resulta, naturalmente, que $\delta \tau = (\vec{F} \cdot \vec{v}_C) dt = 0$.





3ª Questão (3,0 pontos). Baseado nas simulações sugeridas no EMSC#2 de 2018, os gráficos abaixo apresentam duas histórias temporais do movimento com impacto (gráficos à esquerda) e duas projeções de trajetórias de fase no plano $(\theta, \dot{\theta})$ do sistema amortecido (gráficos à direita). Para o Caso 1 (gráficos superiores) foram utilizadas as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = \pi - 0,001$ rad; $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s, $c_\theta = 0,002$ Nms/rad e batente com coeficiente de restituição $e = 0,8$. Para o Caso 2 (gráficos inferiores) foram utilizadas as seguintes condições iniciais: $\theta(0) = 0,0$; $\dot{\theta}(0) = 0,0$; momento externo $\vec{M}^{\text{ext}} = M_0 \sin(\omega_m t + \phi) \vec{k}$, com magnitude $M_0 = 0,03$ Nm, frequência $\omega_m = 1,0 \omega_n$, fase $\phi = 0$ e $c_\theta = 0,01$ Nms/rad. Para cada simulação (Caso 1 e Caso 2), descreva o movimento, analise e interprete os resultados utilizando conceitos da dinâmica.





Solução

Caso 1: o pêndulo foi abandonado em torno da posição de equilíbrio instável ($\theta(0) = \pi - 0,001$ rad), em movimento livre. A posição angular variou até atingir o batente a $-22,5^\circ$, conforme apresentado no gráfico superior à esquerda. Neste instante o primeiro impacto fez a velocidade angular variar abruptamente de cerca de -10 rad/s para $+8$ rad/s, devido ao coeficiente de restituição $e = 0,8$, conforme apresentado no gráfico superior à direita. O movimento se repete com sucessivos impactos com amplitudes gradativamente menores devido à dissipação de energia produzida pela restituição parcial no impacto e amortecimento. Após dez impactos o movimento torna-se oscilatório em torno da posição de equilíbrio até o repouso completo devido ao amortecimento. (1,5 pontos)

Caso 2: o pêndulo em repouso foi acionado a partir do instante $t = 0,5$ segundos, por um momento externo senoidal de magnitude $M_0 = 0,03$ Nm, com frequência idêntica à do pendulo linear. Isso produziu um movimento a partir da posição de equilíbrio estável, que se amplificou devido à ressonância (ou seja devido a $\omega_m = 1,0 \omega_n$) até que houve toque no batente, conforme apresentado no gráfico inferior à esquerda. Após o primeiro evento de impacto estabelece-se um movimento oscilatório com sucessivos impactos com perda de energia compensada pelo acionamento externo, conforme apresentado no gráfico inferior à direita. (1,5 pontos)