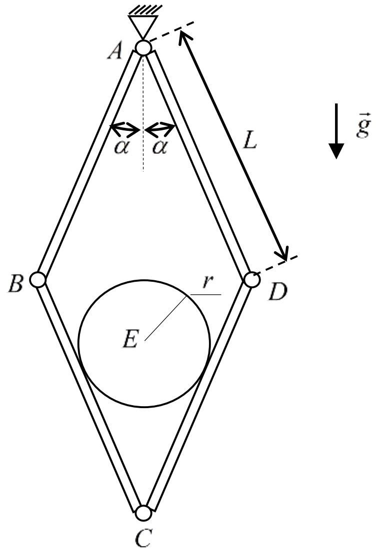
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II - PME 3200 – Segunda Prova – 25 de maio de 2017
Duração da Prova: 110 minutos (*não é permitido uso de dispositivos eletrônicos*)

1ª Questão (3,5 pontos). As quatro barras articuladas *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, de iguais comprimentos *L* e pesos *P*, formam um mecanismo plano ligado ao ponto fixo *A*. Um disco de raio *r* e peso *Q* apoia-se sobre as barras *BC* e *CD*, conforme indicado na figura. Admite-se que o atrito nas articulações e entre a superfície do disco e as das barras seja desprezível. O eixo *Ay* é vertical e orientado para baixo. Pede-se estabelecer a configuração de equilíbrio do sistema. Para tanto:

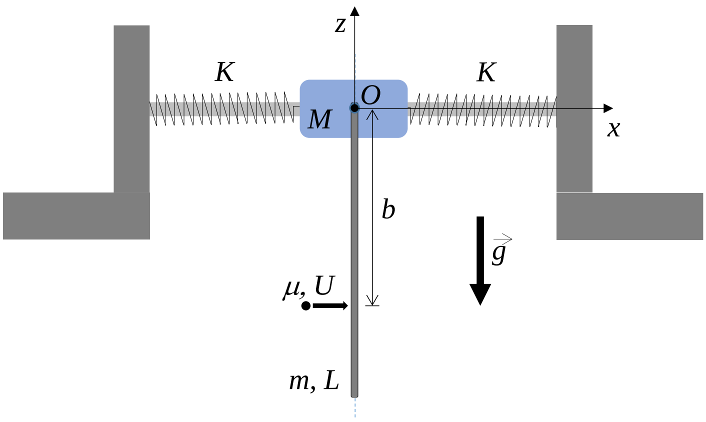


(a) Escreva as coordenadas verticais dos centros de massa, y_1, do mecanismo de quatro barras e y_2, do disco.

(b) Determine os deslocamentos virtuais δy_1 e δy_2, em função de $\delta\alpha$.

(c) A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduza a equação que permite calcular o ângulo α correspondente ao equilíbrio estático do sistema.

2ª Questão (3,5 pontos) - *Baseado no EMSC-2017*. O dispositivo é composto por um bloco de massa *M* e uma barra de massa *m* e comprimento *L*. O bloco pode deslizar *sem atrito* ao longo de uma guia horizontal de seção quadrada. A barra, de distribuição homogênea de massa, está articulada ao bloco em *O*, podendo girar livremente e sem atrito em torno do eixo *Oy*, que é perpendicular ao plano da figura. A base canônica $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orienta o sistema cartesiano *Oxyz*. Considere o sistema em repouso na posição de equilíbrio trivial, i.e., $x(0)=0$, $\theta(0)=0$. No instante $t=0$, uma partícula de massa μ, choca-se contra a barra, com velocidade $\vec{U}=U\vec{i}$, conforme mostra a figura abaixo. Admitindo válidas as hipóteses de choque segundo Newton e conhecido o coeficiente de restituição, *e*, e os demais parâmetros do problema, determine os impulsos decorrentes do choque e a condição cinemática do sistema no instante $t=0^+$, a ele imediatamente posterior; ou seja: $v_0' = \dot{x}(0^+), \omega' = \dot{\theta}(0^+), \vec{U}' = U'\vec{i}$.



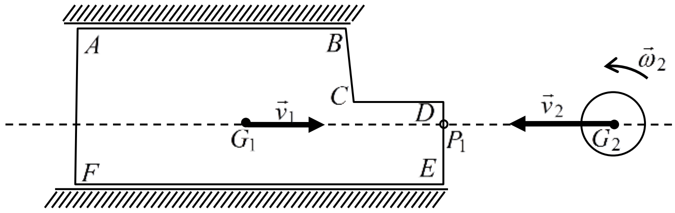
Para tanto:

(a) Construa os diagramas de corpo-livre do bloco, da barra e da partícula, indicando os impulsos sobre eles agentes. Denomine $\vec{I}_1 = I_1\vec{i}$ o impulso transmitido à barra pela partícula e $\vec{I}_2 = I_2\vec{i}$ o impulso reativo aplicado à barra pelo bloco.
(b) Aplique os Teoremas da Resultante dos Impulsos à barra, ao bloco e à partícula.
(c) Aplique o Teorema do Momento dos Impulsos à barra, tomando o polo em *O*.
(d) Considere a hipótese de restituição de Newton e escreva uma relação entre v_0', ω', U', em função de *e* e *U*.
(e) Obtenha, então, um sistema de *três* equações lineares para a determinação de v_0', ω', U' .
(f) Indique claramente as *duas* equações, decorrentes da dedução acima, que permitirão determinar I_1 e I_2.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). A lâmina plana *ABCDEF* de massa m_1 move-se com velocidade $v_1\vec{i}$ constante guiada por dois trilhos paralelos. Um disco de raio r e massa m_2, animado de velocidade angular $\vec{\omega}_2$, constante, move-se com velocidade $-v_2\vec{i}$, constante, no mesmo plano do movimento da lâmina. Em um dado instante o disco colide com a lâmina à altura do ponto P_1, conforme indicado na figura. Considerando *desprezível o atrito entre todas as superfícies de contato*, pede-se:



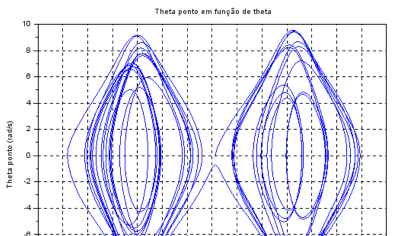
(a) desenhar os diagramas de impulsos para a lâmina e para o disco no instante da colisão;
(b) determinar a velocidade angular do disco imediatamente após a colisão;
(c) determinar o valor do coeficiente de restituição *e* e a relação entre as massas m_1 e m_2 para que, imediatamente após a colisão, a lâmina se mova com velocidade $v_1\vec{i}/2$ e o disco com velocidade $v_2\vec{i}/2$.
(d) determinar o intervalo de variação da relação v_2/v_1 compatível com a situação descrita no item (c).

4ª Questão (1,0 ponto). *Baseada nas simulações sugeridas no EMSC-2017, com os parâmetros* $m = 1\text{kg},\ L = 1\text{m},\ K = 10\text{N/m},\ g = 10\text{m/s}^2,\ U = 1\text{m/s}$. Os gráficos abaixo apresentam ***três*** projeções de trajetórias de fase no plano $(\dot{\theta}, \theta)$, correspondentes a ***dois*** conjuntos de condições iniciais distintos (dados no S.I.):

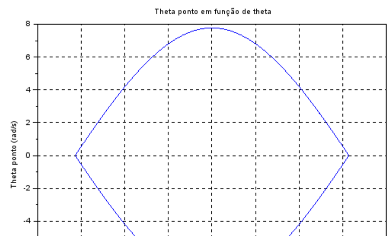
$$(\mathbf{1})\ x(0)=0;\ \theta(0)=(\pi-0{,}01);\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0\,; \quad (\mathbf{2})\ x(0)=0{,}1;\ \theta(0)=\pi;\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0.$$

Uma das três simulações utilizou o parâmetro *M* =100kg; as outras duas consideraram *M* =1kg.

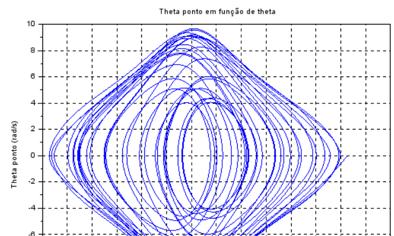
Simulação A



Simulação B



Simulação C

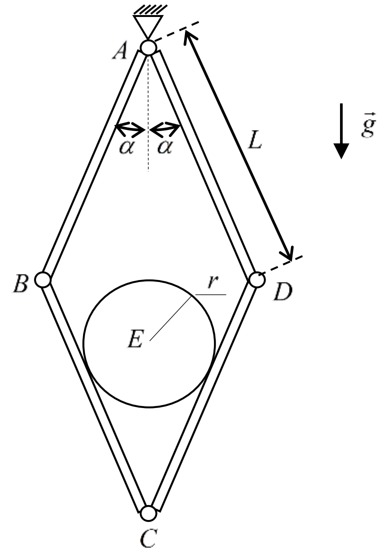


Identifique as simulações A, B e C aos correspondentes conjuntos de condições iniciais e ao respectivo parâmetro *M* nelas utilizado. Para tanto, construa uma tabela de correspondências, conforme modelo abaixo, indicando os números que identificam os conjuntos de condições iniciais (1 ou 2) e o respectivo valor de *M* (1kg ou 100kg). Justifique todas as respostas.

Simulação	Condição Inicial	*M* (kg)	Justificativa
A			
B			
C			

MECÂNICA II - PME 3200 – Segunda Prova – 25 de maio de 2017
RESOLUÇÃO

1ª Questão (3,5 pontos). As quatro barras articuladas *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, de iguais comprimentos *L* e pesos *P*, formam um mecanismo plano ligado ao ponto fixo *A*. Um disco de raio *r* e peso *Q* apoia-se sobre as barras *BC* e *CD*, conforme indicado na figura. Admite-se que o atrito nas articulações e entre a superfície do disco e as das barras seja desprezível. O eixo *Ay* é vertical e orientado para baixo. Pede-se estabelecer a configuração de equilíbrio do sistema. Para tanto:



(a) Escreva as coordenadas verticais dos centros de massa, y_1, do mecanismo de quatro barras e y_2, do disco.

(b) Determine os deslocamentos virtuais δy_1 e δy_2, em função de $\delta\alpha$.

(c) A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduza a equação que permite calcular o ângulo α correspondente ao equilíbrio estático do sistema.

Resolução:

(a) As posições verticais dos centros de massa do mecanismo de quatro barras e do disco são dadas, respectivamente, por: (1,0)

$$y_1 = L\cos\alpha \tag{1}$$

$$y_2 = 2L\cos\alpha - \frac{r}{\sin\alpha} \; . \tag{2}$$

(b) Das expressões acima, segue: (1,0)

$$\delta y_1 = -L\,\delta\alpha \sin\alpha \tag{3}$$

$$\delta y_2 = -2L\,\delta\alpha \sin\alpha + r\,\delta\alpha \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \delta\alpha\left[-2L\sin\alpha + r\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]. \tag{4}$$

(c) Para determinar a configuração de equilíbrio do sistema aplicaremos o Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Para um deslocamento virtual arbitrário $\delta\alpha$, tem-se: (1,0)

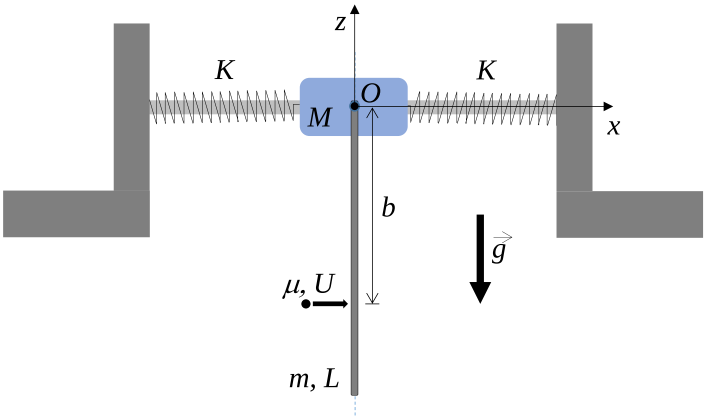
$$\delta\tau = 4P\,\delta y_1 + Q\,\delta y_2 = 4PL(-\delta\alpha\sin\alpha) + Q\,\delta\alpha\left[-2L\sin\alpha + r\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right] = 0\,. \tag{5}$$

A expressão acima será verdadeira, independentemente do valor do deslocamento virtual $\delta\alpha$, se, necessariamente: (0,5)

$$(4P + 2Q)L\sin^3\alpha - Qr\cos\alpha = 0\,. \tag{6}$$

A equação anterior permite determinar o valor do ângulo α compatível com o equilíbrio. Sua resolução requer a aplicação de métodos numéricos ou gráficos.

2ª Questão (3,5 pontos) - *Baseado no EMSC-2017*. O dispositivo é composto por um bloco de massa M e uma barra de massa m e comprimento L. O bloco pode deslizar *sem atrito* ao longo de uma guia horizontal de seção quadrada. A barra, de distribuição homogênea de massa, está articulada ao bloco em O, podendo girar livremente e sem atrito em torno do eixo Oy, que é perpendicular ao plano da figura. A base canônica $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orienta o sistema cartesiano $Oxyz$. Considere o sistema em repouso na posição de equilíbrio trivial, i.e., $x(0)=0$, $\theta(0)=0$. No instante $t=0$, uma partícula de massa μ, choca-se contra a barra, com velocidade $\vec{U}=U\vec{i}$, conforme mostra a figura abaixo. Admitindo válidas as hipóteses de choque segundo Newton e conhecido o coeficiente de restituição, e, e os demais parâmetros do problema, determine os impulsos decorrentes do choque e a condição cinemática do sistema no instante $t=0^+$, a ele imediatamente posterior; ou seja: $v_0'=\dot{x}(0^+), \omega'=\dot{\theta}(0^+), \vec{U}'=U'\vec{i}$.



Para tanto:

(a) Construa os diagramas de corpo-livre do bloco, da barra e da partícula, indicando os impulsos sobre eles agentes. Denomine $\vec{I}_1 = I_1\vec{i}$ o impulso transmitido à barra pela partícula e $\vec{I}_2 = I_2\vec{i}$ o impulso reativo aplicado à barra pelo bloco.

(b) Aplique os Teoremas da Resultante dos Impulsos à barra, ao bloco e à partícula.

(c) Aplique o Teorema do Momento dos Impulsos à barra, tomando o polo em O.

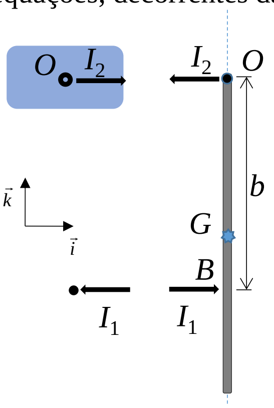
(d) Considere a hipótese de restituição de Newton e escreva uma relação entre v_0', ω', U', em função de e e U.

(e) Obtenha, então, um sistema de *três* equações lineares para a determinação de v_0', ω', U'.

(f) Indique claramente as *duas* equações, decorrentes da dedução acima, que permitirão determinar I_1 e I_2.

Resolução:

(a) Digrama de corpo-livre:



(0,5)

(b) Na configuração de choque considerada, com barra e bloco na posição de equilíbrio trivial e em condição inicial de repouso, i.e., $(x(0)=0, \theta(0)=0, v_O(0)=\dot{x}(0)=0,\ \omega(0)=\dot{\theta}(0)=0)$, o TRI aplicado à barra, ao bloco e à partícula fornece: (0,5)

$$m v_G'\vec{i} = (I_1 - I_2)\vec{i} \tag{1}$$

$$M v_O'\vec{i} = I_2\vec{i} \tag{2}$$

$$\mu(U' - U)\vec{i} = -\vec{I}_1 = -I_1\vec{i} \tag{3}$$

Por outro lado, do campo de velocidades de um corpo rígido, segue que: (i) $\vec{v}'_G = v'_G\vec{i} = (v'_O - \omega'\frac{L}{2})\vec{i}$; (ii) $\vec{v}'_B = v'_B\vec{i} = (v'_O - \omega' b)\vec{i}$, com B o ponto de impacto. Segue então de (1) e (2) que

$m(v'_O - \omega'\frac{L}{2}) = I_1 - Mv'_O$ a qual, utilizando (3), transforma-se em (0,5)

$$(m+M)v'_O - m\frac{L}{2}\omega' = \mu(U - U') \tag{4}$$

(c) Do TMI aplicado à barra (caso plano), com polo O, escreve-se: (0,5)

$m(G-O)\wedge\Delta\vec{v}_O + m\frac{L^2}{3}\Delta\vec{\omega} = \vec{\mathscr{M}}_O = (B-O)\wedge\vec{I}_1$, que fornece

$$-m\frac{L}{2}v'_O + m\frac{L^2}{3}\omega' = -I_1 b = \mu b(U' - U) \tag{5}$$

(d) Supondo válida a hipótese de restituição de Newton, escreve-se $v'_B - U' = -e(-U) = eU$, a qual, com o uso da relação cinemática (ii), transforma-se em (0,5)

$$v'_O - \omega' b - U' = eU \tag{6}$$

(e) As equações (4), (5) e (6), abaixo reescritas, formam um sistema linear (7), de 3 equações, que deve ser resolvido para a obtenção das incógnitas (v'_0, ω', U'): (0,5)

$$\begin{cases} (m+M)v'_O - m\frac{L}{2}\omega' + \mu U' = \mu U \\ m\frac{L}{2}v'_O - m\frac{L^2}{3}\omega' + \mu b U' = \mu b U \\ v'_O - b\omega' - U' = eU \end{cases} \tag{7}$$

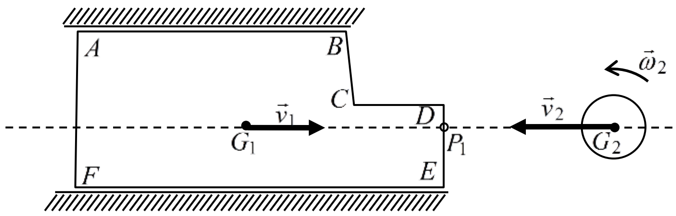
Note que as equações (7) podem ser escritas na forma matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (m+M) & -m\frac{L}{2} & \mu \\ m\frac{L}{2} & -m\frac{L^2}{3} & \mu b \\ 1 & -b & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} v'_O \\ \omega' \\ U' \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = U\begin{bmatrix} \mu \\ \mu b \\ e \end{bmatrix} \tag{8}$$

(f) As equações (2) e (3), com v'_0, U' determinados de (7), permitem calcular I_1 e I_2: (0,5)

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu(U - U') \\ I_2 &= Mv'_O \end{aligned} \tag{9}$$

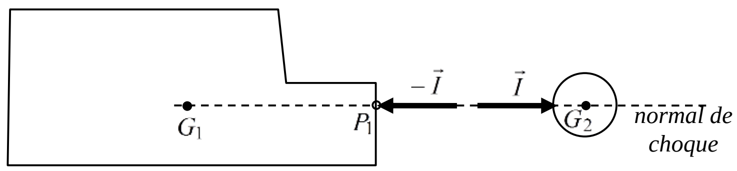


3ª Questão (3,0 pontos). A lâmina plana *ABCDEF* de massa m_1 move-se com velocidade $v_1\vec{i}$ constante guiada por dois trilhos paralelos. Um disco de raio r e massa m_2, animado de velocidade angular $\vec{\omega}_2$, constante, move-se com velocidade $-v_2\vec{i}$, constante, no mesmo plano do movimento da lâmina. Em um dado instante o disco colide com a lâmina à altura do ponto P_1, conforme indicado na figura. Considerando *desprezível o atrito entre todas as superfícies de contato*, pede-se:

(a) desenhar os diagramas de impulsos para a lâmina e para o disco no instante da colisão;
(b) determinar a velocidade angular do disco imediatamente após a colisão;
(c) determinar o valor do coeficiente de restituição *e* e a relação entre as massas m_1 e m_2 para que, imediatamente após a colisão, a lâmina se mova com velocidade $v_1\vec{i}/2$ e o disco com velocidade $v_2\vec{i}/2$.
(d) determinar o intervalo de variação da relação v_2/v_1 compatível com a situação descrita no item (c).

Resolução:

(a) Os diagramas de impulsos, no instante da colisão, são apresentados na figura abaixo: (0,5)



(b) Aplicando-se o Teorema do Momento dos Impulsos para o disco, obtém-se sua velocidade angular imediatamente após a colisão: (0,5)

$$\Delta\vec{H}_{G_2} = \vec{\mathcal{M}}_{G_2} = \vec{0} \Rightarrow J_{G_2 z}\left(\vec{\omega}_2' - \vec{\omega}_2\right) = \vec{0} \Rightarrow \omega_2' = \omega_2 \tag{1}$$

(c) Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos para a lâmina e para o disco, obtém-se a relação entre suas massas, coerente com as condições do enunciado: (0,5)

$$m_1\left(v_1' - v_1\right) = -I \Rightarrow \frac{v_1}{2} - v_1 = -\frac{I}{m_1} \Rightarrow I = m_1\frac{v_1}{2} \tag{2}$$

$$m_2\left(v_2' - \left(-v_2\right)\right) = I \Rightarrow \frac{v_2}{2} + v_2 = \frac{I}{m_2} \Rightarrow I = m_2\frac{3v_2}{2} \Rightarrow m_1\frac{v_1}{2} = m_2\frac{3v_2}{2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 3\frac{v_2}{v_1} \tag{3}$$

Sendo P_1 e P_2, respectivamente, os pontos de contato da lâmina e do disco no instante do choque, suas velocidades, nos instantes imediatamente anterior e imediatamente posterior a esse evento, são dados por: (0,5)

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_1 = v_1\vec{i} \tag{4}$$

$$\vec{v}_{P_1}' = \vec{v}_1' = \frac{v_1}{2}\vec{i} \tag{5}$$

$$\vec{v}_{P_2} = -v_2\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge (P_2 - G) = -v_2\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \left(-r\vec{i}\right) = -v_2\vec{i} - \omega r\vec{j} \tag{6}$$

$$\vec{v}'_{P_2} = \frac{v_2}{2}\vec{i} + \omega'\vec{k} \wedge (P_2 - G) = \frac{v_2}{2}\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \left(-r\vec{i}\right) = \frac{v_2}{2}\vec{i} - \omega r\vec{j}\,. \tag{7}$$

A hipótese de Newton para o caso de choque central entre corpos rígidos fornece o valor do coeficiente de restituição. (0,5)

$$u' = \left(\vec{v}'_{P_2} - \vec{v}'_{P_1}\right)\cdot\vec{i} = -eu = -e\left(\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1}\right)\cdot\vec{i} \Rightarrow \left[\frac{v_2}{2}\vec{i} - \omega r\vec{j} - \left(\frac{v_1}{2}\vec{i}\right)\right]\cdot\vec{i} = -e\left(-v_2\vec{i} - \omega r\vec{j} - v_1\vec{i}\right)\cdot\vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \tag{8}$$

(d) Para que a expressão do coeficiente de restituição e seja válida, a seguinte condição deve ser satisfeita: (0,5)

$$0 \le e = \frac{1}{2}\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \le 1 \tag{9}$$

As duas desigualdades acima implicam que:

$$v_2 > v_1 \tag{10}$$

e

$$v_2 - v_1 \le 2v_1 + 2v_2 \Rightarrow v_2 \ge -3v_1 \tag{11}$$

Conclui-se, portanto, que o movimento descrito é possível, desde que

$$\frac{m_1}{m_2} = 3\frac{v_2}{v_1} \tag{12}$$

e

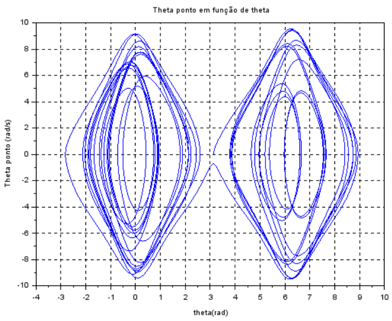
$$v_2 \ge v_1 \tag{13}$$

4ª Questão (1,0 ponto). *Baseada nas simulações sugeridas no EMSC-2017, com os parâmetros* $m = 1\text{kg},\ L = 1\text{m},\ K = 10\text{N/m},\ g = 10\text{m/s}^2,\ U = 1\text{m/s}$. Os gráficos abaixo apresentam ***três*** projeções de trajetórias de fase no plano $(\dot{\theta}, \theta)$, correspondentes a ***dois*** conjuntos de condições iniciais distintos (dados no S.I.):

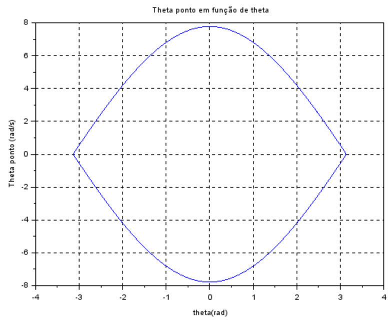
(**1**) $x(0) = 0;\ \theta(0) = (\pi - 0{,}01);\ \dot{x}(0) = 0;\ \dot{\theta}(0) = 0$; (**2**) $x(0) = 0{,}1;\ \theta(0) = \pi;\ \dot{x}(0) = 0;\ \dot{\theta}(0) = 0$.

Uma das três simulações utilizou o parâmetro M =100kg; as outras duas consideraram M =1kg.

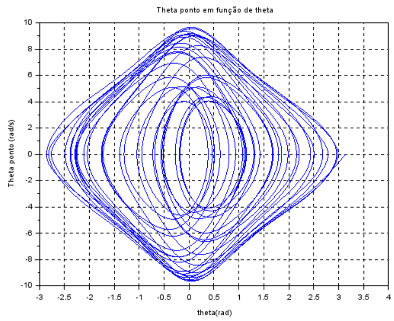
Simulação A



Simulação B



Simulação C



Identifique as simulações A, B e C aos correspondentes conjuntos de condições iniciais e ao respectivo parâmetro M nelas utilizado. Para tanto, construa uma tabela de correspondências, conforme modelo abaixo, indicando os números que identificam os conjuntos de condições iniciais (1 ou 2) e o respectivo valor de M (1kg ou 100kg). Justifique todas as respostas.

Resolução: (1,0)

Simulação	Condição Inicial	M (kg)	Justificativa
A	**(2)**	**1**	O sistema parte com o pêndulo na vertical, acima do bloco, a partir do repouso, com o bloco deslocado para a direita de 0,1m. Nesta configuração as molas aplicam ao bloco força restauradora para a esquerda, o que faz com que sua aceleração inicial tenha esta mesma orientação. O equilíbrio do pêndulo nesta posição é instável e a aceleração inicial do bloco para a esquerda faz com que a aceleração angular do pêndulo se dê no sentido horário (positivo). A trajetória no plano de fase apresentado indica que o movimento se inicia como descrito, evoluindo para uma sequência de oscilações em torno do ponto de equilíbrio $(0;2\pi)$, que é um centro estável. A energia mecânica inicial do sistema é suficientemente alta para que o movimento evolua com oscilações em torno do ponto de equilíbrio $(0;0)$, também um centro estável. Fica evidente que os pontos de equilíbrio $(0;n\pi)$, n ímpar, são instáveis (pontos de sela). Já os pontos de equilíbrio $(0;2n\pi)$ são estáveis (centros estáveis). O movimento é não periódico. As oscilações do pêndulo têm amplitude variável, atingindo valores inferiores a π.
B	**(1)**	**100**	O sistema parte do repouso, com o pêndulo em posição praticamente vertical, $x(0)=0;\ \theta(0)=(\pi-0{,}01);\ \dot{x}(0)=0;\ \dot{\theta}(0)=0$, e passa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio trivial, centro estável. A inércia do bloco é muito grande, de sorte que o pêndulo pouco altera sua posição. Como consequência, a trajetória apresentada no plano de fase $(\dot{\theta},\theta)$ é praticamente a mesma que seria verificada se a articulação O estivesse fixa, quando então o sistema dinâmico se reduziria a um pêndulo composto. O movimento é visivelmente periódico e as amplitudes de oscilação do pêndulo são de grande amplitude, muito próximas de π.
C	**(1)**	**1**	A condição inicial do sistema é a mesma da simulação B. No entanto as massas dos subsistemas bloco e pêndulo são as mesmas, de tal sorte que a interação dinâmica é bastante acentuada. O movimento é não periódico. A trajetória apresentada no plano de fase $(\dot{\theta},\theta)$ mostra grandes oscilações do pêndulo, porém de amplitude variável, atingindo valores inferiores a π.