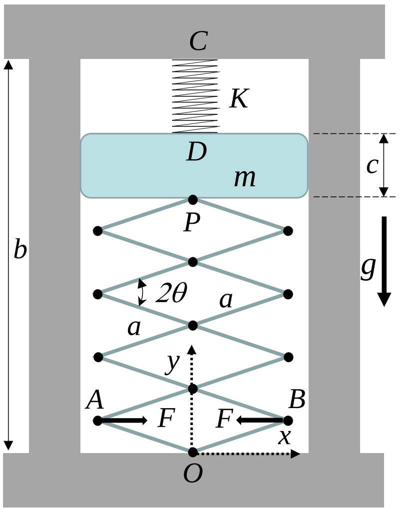
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Segunda Prova – 12 de maio de 2016
Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)



1ª Questão. (3,5 pontos)
A figura ao lado mostra, instalado em uma caixa rígida, um sistema de travamento para uma peça, composto por uma treliça pantográfica e uma mola helicoidal. A treliça, de quatro módulos pantográficos, é constituída por dez barras, articuladas entre si, e é articulada à caixa em *O* e à peça em *P*. A peça é *rígida*, de massa *m* e altura *c*, e pode deslizar *sem atrito* no interior da caixa, que serve como guia. A mola é linear, tem comprimento natural indeformado *d* e constante elástica *K*. Um par de forças, de mesma intensidade *F* e de sentidos opostos, é aplicado nas articulações *A* e *B*. Considerando: (i) *a ação da gravidade* - conforme indicado na figura, (ii) os *vínculos ideais* e (iii) desprezando-se as massas da treliça e da mola, pede-se:

(a) Escrever os deslocamentos virtuais dos pontos *relevantes à solução do problema* em função do deslocamento virtual angular, $\delta\theta$.
Os pontos relevantes são todos aqueles sujeitos a forças com trabalhos virtuais não-nulos. São eles: *A*, *B*, *P* e *D*.
Tem-se,

$(A-O) = -a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}$, de tal forma que

$\delta A = a\delta\theta\left(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)$, e, por simetria, $\delta B = a\delta\theta\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)$. (0,5)

A peça pode apenas se deslocar na vertical, de forma que $(D-O) = 8a\sin\theta\vec{j}$ e, portanto, $\delta P = 8a\delta\theta\cos\theta\vec{j}$.
Como a peça é suposta rígida, $\delta D = \delta P = 8a\delta\theta\cos\theta\vec{j}$. (0,5)

(b) Expressar a força de reação elástica da mola como função do ângulo θ e dos parâmetros geométricos *a*, *b*, *c* e *d*.
A força de reação elástica da mola sobre a peça é dada por:

$$\vec{F}_E = -K\Delta\vec{j} = -K\left[d-\left(b-(c+8a\sin\theta)\right)\right]\vec{j}\,. \qquad (0,5)$$

(c) Fazendo uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais, determinar a intensidade da força *F*, compatível com o equilíbrio na configuração considerada na figura.

Os trabalhos virtuais das forças aplicadas, da reação elástica e do peso da peça são dados respectivamente por,

$$\delta W_{F_A} = \delta W_{F_B} = F\vec{i}\cdot\delta A = Fa\delta\theta\sin\theta$$
$$\delta W_{F_E} = \delta W_{F_B} = \vec{F}_E\cdot\delta D = -8Ka\delta\theta\cos\theta\left[d-\left(b-(c+8a\sin\theta)\right)\right]$$
$$\delta W_{mg} = -mg\vec{j}\cdot\delta P = -8mga\delta\theta\cos\theta \qquad (0,5).$$

Pelo PTV teremos: $\delta W = \delta W_{F_A} + \delta W_{F_B} + \delta W_{F_E} + \delta W_{mg} = 0$, de tal forma que

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$\{2Fa\sin\theta - 8Ka\cos\theta[d-(b-(c+8a\sin\theta))]-8mga\cos\theta\}\delta\theta = 0$ e, portanto, para um deslocamento virtual arbitrário, $\delta\theta$, tem-se $\{2Fa\sin\theta - 8Ka\cos\theta[d-(b-(c+8a\sin\theta))]-8mga\cos\theta\} = 0$, que conduz a

$$F = 4[mg + K[d-(b-(c+8a\sin\theta))]]\cot\theta . \qquad (0,5)$$

(d) Determinar o ângulo $\bar{\theta}$ correspondente à configuração em que a mola estaria em seu comprimento natural.
Basta fazer a força elástica nula. Vem,

$$\sin\bar{\theta} = \frac{b-(c+d)}{8a}\text{; com } |b-(c+d)| \le 8a . \qquad (0,5)$$

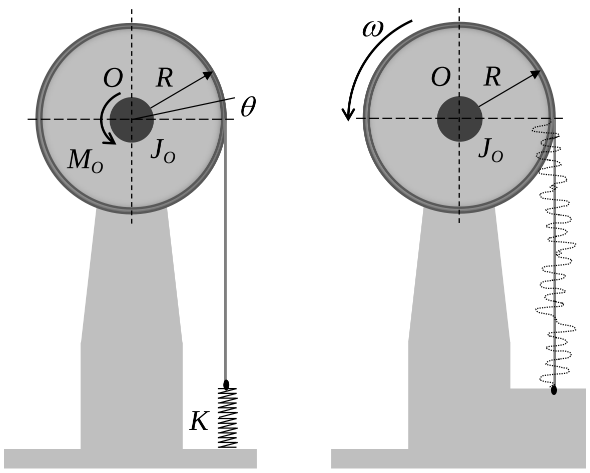
(e) Generalizar o resultado dos itens (c) e (d) para uma treliça composta por *n* células pantográficas.

Generalizando, para n células:

$$F = n[mg - K[(b-(c+2na\sin\theta))-d]]\cot\theta .$$

$$\sin\bar{\theta} = \frac{b-(c+d)}{2na}\text{; com } |b-(c+d)| \le 2na . \qquad (0,5)$$

2ª Questão. (3,5 pontos)



(a) (b)

As figuras ao lado mostram uma bobina de papel. Na condição indicada, o raio externo da bobina é *R* e o momento de inércia em relação ao eixo é J_O. Considere, primeiramente, a figura (a), que ilustra um experimento. O papel está preso, através de uma travessa, a uma mola helicoidal linear, de constante *K*, e esta ao chão. A pequena extensibilidade do papel pode ser representada por uma mola linear de rigidez K_p, $K_p/K >> 1$, disposta em série com a mola helicoidal. Nesta situação, uma mola equivalente de rigidez $K_E = K(1+K/K_p)^{-1}$ representa a rigidez elástica do sistema. Ao eixo é aplicado um torque M_O, *medindo-se* a rotação de equilíbrio decorrente, $\bar{\theta}$. Considerando $\theta = 0$ na condição não tensionada e desprezando-se o atrito no eixo pede-se:

(a) Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, escrever a relação de equilíbrio envolvendo M_O, $\bar{\theta}$, K_E e *R*.

O trabalho virtual do binário aplicado ao eixo é dado por $\delta W_M = M_O\delta\theta$.

Sob o conceito da constante de mola equivalente, o trabalho virtual da força elástica pode ser escrito, por sua vez, $\delta W_{F_E} = -F_E R\delta\theta = -K_E R\theta R\delta\theta = -K_E R^2\theta\delta\theta$. Como, pelo PTV, $\delta W = \delta W_M + \delta W_{F_E} = 0$, então,

$$M_O = K_E R^2\bar{\theta} . \qquad (1,0)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

(b) Determinar K_p em função de M_O, $\bar{\theta}$, K e R.

Com $K_E = K\,(1+K/K_p)^{-1}$ em $M_O = K_E R^2\bar{\theta}$ vem, $M_O = \dfrac{K}{(1+K/K_p)}R^2\bar{\theta}$, de onde,

$$K_p = \frac{K}{\left[\dfrac{KR^2\bar{\theta}}{M_0} - 1\right]} \qquad (0,5)$$

Considere agora a figura (b). Trata-se de um segundo experimento, com objetivo de avaliar a resistência do papel a paradas bruscas de sistemas de armazenamento, ou seja, sua resistência última a esforços impulsivos. *O sistema está inicialmente em repouso*, com o papel frouxo, preso na travessa que está fixa no pedestal, conforme indicado. A bobina está livre para girar, *sem atrito*, em torno de seu eixo. O eixo é acionado, acelerando rapidamente e atinge uma velocidade angular requerida, ω, a qual é controlada até que o papel seja subitamente esticado, provocando uma parada brusca da bobina. *Em uma primeira análise, desprezando-se a extensibilidade do papel durante o evento impulsivo* e utilizando o teorema do momento dos impulsos (TMI), pede-se (*expresse o resultado em função dos parâmetros,* ω, R, J_O):

(c) Determinar a intensidade do impulso I transmitido ao papel.

Supondo parada brusca, de forma que $\omega' = 0$, imediatamente após o evento, do TMI, $-IR = J_O\Delta\omega = J_O(\omega' - \omega) = -J_O\omega$ e, portanto, a intensidade do impulso é simplesmente,

$$I = \frac{J_O\omega}{R}\,. \qquad (1,0)$$

Em uma segunda análise, de posse da rigidez K_p, avaliada a partir do experimento anterior, figura (a), pode-se quantificar a duração do evento impulsivo como $\Delta T \cong \pi\sqrt{J_O/(K_p R^2)}$. Assumindo, então, que a força impulsiva seja dada por $F(t) = F_0 \sin(\pi t/\Delta T);\, t\in[0,\Delta T]$, pede-se:

(d) Calcular o valor máximo da força, F_0, expressando o resultado em função de ΔT e dos demais parâmetros.

Da definição de impulso, $[I]_0^{\Delta T} = \int_0^{\Delta T} F(t)dt$, que, integrada com $F(t) = F_0 \sin(\pi t/\Delta T);\, t\in[0,\Delta T]$, fornece

$$I = \left[-F_0\frac{\Delta T}{\pi}\cos(\pi t/\Delta T)\right]_0^{\Delta T} = \frac{2}{\pi}F_0\Delta T \text{, e que traz } F_0 = \frac{\pi}{2}\frac{J_O\omega}{R\Delta T}\,. \qquad (0,5)$$

Substituindo a duração do evento, $\Delta T \cong \pi\sqrt{J_O/(K_p R^2)}$, vem então: $F_0 = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{J_O K_p}$.

(e) Determinar o valor máximo da força de reação impulsiva transmitida ao mancal da bobina.

O valor máximo da reação impulsiva transmitida ao mancal é igual a $F_0 = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{J_O K_p}$. (0,5)

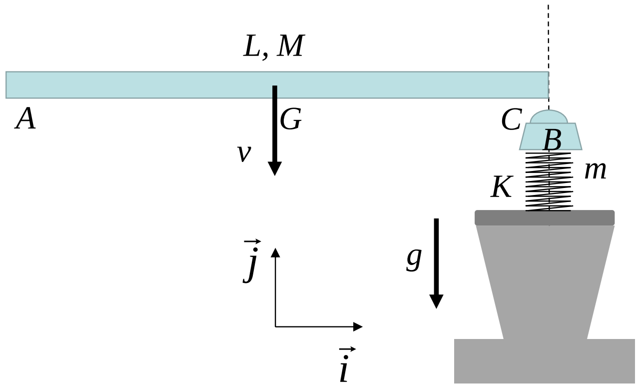
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão. (3,0pontos)

A barra *AC*, de massa *M* e comprimento *L*, cai em atitude horizontal, em movimento de translação vertical. O bloco *B*, de massa *m* está apoiado sobre uma mola helicoidal linear de constante *K*. Imediatamente antes do choque com o bloco, que se dará no ponto extremo direito da barra, *C*, a velocidade de translação é $\vec{v} = -v\vec{j}$. O choque se dá sem atrito. A geometria do choque permite postular que o impulso transmitido ao bloco seja vertical. Admitindo-se válida a hipótese de restituição de Newton e conhecendo-se o coeficiente de restituição *e*, pede-se determinar:



(a) A velocidade do centro de massa da barra $\vec{v}'_G$ e sua velocidade angular $\vec{\omega}'$ imediatamente após o choque.

Considerando o sistema composto por barra e bloco e como a reação da mola não é impulsiva, podemos dizer que o momento da quantidade de movimento do sistema se conserva, em relação a qualquer polo considerado. Assim tomando G como polo de momentos, teremos $(C-G)\times m\vec{v}'_B + J_G\vec{\omega}' = \vec{0}$, com $\vec{v}'_B = v'_B\vec{j}$ e $\vec{\omega}' = \omega'\vec{k}$, de onde, $m\dfrac{L}{2}v'_B\vec{k} + J_G\omega'\vec{k} = 0$. Ou seja, com $J_G = ML^2/12$,

$$\omega' = -\frac{mLv'_B}{2J_G} = -\frac{6mv'_B}{ML} \qquad (0,5)$$

Do TMI aplicado à barra, com $\vec{I} = I\vec{j}$, vem, $I\,L/2 = J_G\omega'$; de onde, $I = ML\omega'/6$. E, do TRI aplicado à barra vem, com $I\vec{j} = M(\vec{v}'_G - \vec{v}) = M(\vec{v}'_G + v\vec{j})$, de onde, $\vec{v}'_G = (\dfrac{I}{M} - v)\vec{j} = (\dfrac{\omega' L}{6} - v)\vec{j}$ (*).

Mas, da hipótese de restituição de Newton, $(\vec{v}'_C - \vec{v}'_B)\cdot\vec{j} = -e(\vec{v}_C - \vec{v}_B)\cdot\vec{j} = -e(\vec{v})\cdot\vec{j} = ev$. Assim,

$\vec{v}'_C\cdot\vec{j} = ev + v'_B$. Mas $\vec{v}'_C = \vec{v}'_G + \vec{\omega}'\times(C-G) = \left(v'_G + \dfrac{\omega' L}{2}\right)\vec{j}$. Logo, $v'_G + \dfrac{\omega' L}{2} = ev + v'_B$. (0,5)

Eliminando v'_B, em favor de ω', e utilizando (*), seguem:

$$\vec{\omega}' = \left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\frac{6v}{L}\vec{k} \qquad \text{e} \qquad \vec{v}'_G = \left[\frac{1+e}{4+M/m} - 1\right]v\vec{j} \qquad (0,5)$$

(b) A velocidade do bloco $\vec{v}'_B$ imediatamente após o choque.

Segue, então, que $\vec{v}'_B = -\dfrac{1}{6}\dfrac{M}{m}\omega' L\vec{j} = -\dfrac{M}{m}\left[\dfrac{1+e}{4+M/m}\right]v\vec{j}$. (0,5)

(c) A energia perdida no choque.

A variação de energia mecânica durante o choque é dada por $\Delta E = \Delta T = (T - T')$. Ou seja,

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 - \left[\frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}Mv_G'^2 + \frac{1}{2}J_G\omega'^2\right]. \qquad (0,5)$$

Desenvolvendo e simplificando:

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2\left[1 - \left(\frac{M}{m}\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]^2 + \left[\frac{1+e}{4+M/m} - 1\right]^2 + 3\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[1 - \left(\left(3 + \frac{M}{m}\right)\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]^2 + \left[\frac{1+e}{4+M/m} - 1\right]^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[1 - \left(\left(4 + \frac{M}{m}\right)\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]^2 - 2\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right] + 1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[-\left(4 + \frac{M}{m}\right)\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]^2 + 2\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\left[-\left(4 + \frac{M}{m}\right)\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right] + 2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\left[-(1+e) + 2\right] = \frac{1}{2}Mv^2\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\left[1-e\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[\frac{1-e^2}{4+M/m}\right]$$

A energia perdida é então: $\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2\,\frac{1-e^2}{4+M/m}$. (0,5)

(d) O máximo deslocamento do bloco, Δ_B, decorrente do choque.

Sejam: t_i o instante imediatamente posterior ao choque, t_f o instante em que a velocidade se anula e $\Delta_B = z_f - z_i < 0$ o deslocamento do bloco, onde z_i e z_f são as correspondentes cotas verticais da base do bloco em relação ao plano de apoio da mola. Seja também l o comprimento natural da mola. Do teorema de conservação de energia mecânica aplicado ao movimento do bloco, considerados estes dois instantes, tem-se,

$$\frac{1}{2}mv_B'^2 + mgz_i + \frac{1}{2}K(z_i - l)^2 = \frac{1}{2}K(z_f - l)^2 + mgz_f\,, \qquad (0,5)$$

que leva a,

$\frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}K(z_i^2 - 2z_il) = \frac{1}{2}K(z_f^2 - 2z_fl) + mg(z_f - z_i)$, e, portanto, a,

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

$$\frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}K(z_i^2 - z_f^2) = Kl(z_i - z_f) + mg\left(z_f - z_i\right).$$

Progredindo com o equacionamento, visando a obtenção da incógnita z_f , vem, após rearranjar a equação acima:

$$z_f^2 + 2\left(\frac{mg}{K} - l\right)z_f - \left[z_i^2 + 2\left(\frac{mg}{K} - l\right)z_i + \frac{m}{K}v_B'^2\right] = 0,$$

Note, porém, que a cota de equilíbrio inicial é dada por $z_i = l - \frac{mg}{K}$, de tal forma que a equação de segundo-grau em z_f pode ser escrita: $z_f^2 - 2z_i z_f + \left[z_i^2 - \frac{m}{K}v_B'^2\right] = 0$, gerando as soluções $z_f = z_i \pm v_B'\sqrt{\frac{m}{K}}$.

Mas, como $z_f < z_i$, a solução procurada é a que corresponde à raiz positiva, pois $v_B' < 0$, de tal forma que o deslocamento do bloco *B* fica:

$$\Delta_B = z_f - z_i = v_B'\sqrt{\frac{m}{K}}, \qquad (0,5)$$

que pode ainda ser escrito

$$\Delta_B = z_f - z_i = \frac{v_B'}{\omega_N},$$

onde $\omega_N = \sqrt{K/m}$ é a frequência natural do sistema bloco-mola, quando livre para oscilar.

Finalmente, se substituído o valor de v_B', anteriormente determinado, vem:

$$\Delta_B = -\frac{M}{m}\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right]\frac{v}{\omega_N} = -\frac{Mv}{\sqrt{Km}}\left[\frac{1+e}{4+M/m}\right].$$