



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

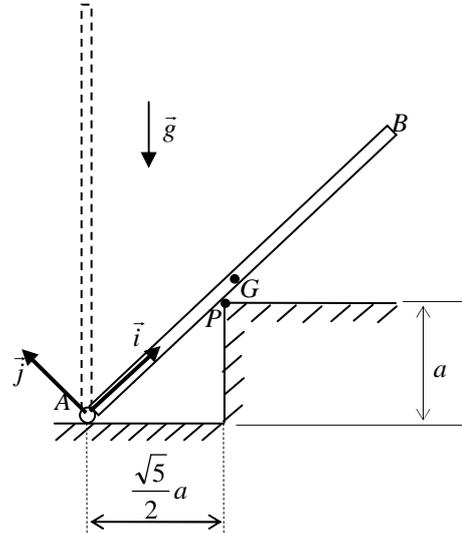
Mecânica 2 – PME 3200 – 2ª Prova – 10/05/2015

Duração da Prova: 110 minutos

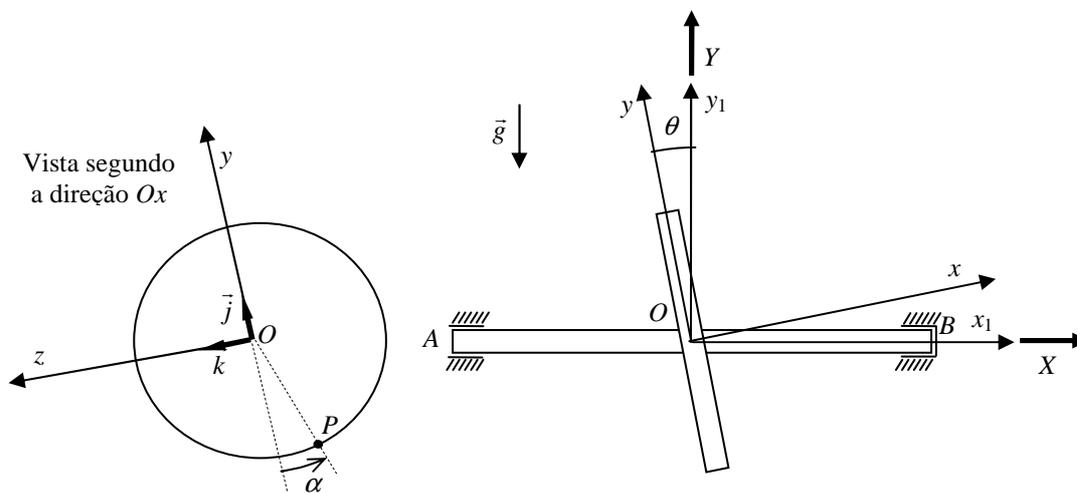
(Não é permitido o uso de calculadoras, celulares, tablets e/ou outros equipamentos similares)

**QUESTÃO 1 (3,5 pontos).** A barra homogênea  $AB$ , de comprimento  $\ell$  e massa  $m$  está articulada em  $A$ . Partindo da posição vertical, com velocidade angular  $\omega_0 \approx 0$ , ela se choca contra a quina  $P$  do degrau, conforme indicado na figura. O atrito no contato entre a barra e o degrau é desprezível e o coeficiente de restituição entre os materiais da barra e do degrau vale  $e$ . Utilizando a base  $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$  ligada à barra, pede-se:

- determinar a velocidade angular da barra imediatamente antes do impacto;
- o diagrama de impulsos da barra;
- determinar a velocidade do baricentro da barra e sua velocidade angular imediatamente após o impacto;
- determinar os impulsos reativos atuantes nos pontos  $A$  e  $P$  da barra durante o impacto;
- determinar o valor de  $a$  para o qual a reação impulsiva em  $A$  é nula.



**QUESTÃO 2 (3,0 pontos).** Considere o enunciado do primeiro exercício de simulação, referente ao movimento de um eixo horizontal de massa  $m$  e raio  $r$  rigidamente ligado a uma roldana de massa  $M$  e raio  $R$ , estando esta última desbalanceada por uma pequena massa  $m'$  localizada em um ponto  $P$  de sua periferia conforme indicado na figura, onde  $OXYZ$  constitui um sistema de eixos fixos no espaço, enquanto ambos os sistemas  $Ox_1y_1z_1$  e  $Oxyz$  são ligados ao conjunto roldana desbalanceada + eixo.



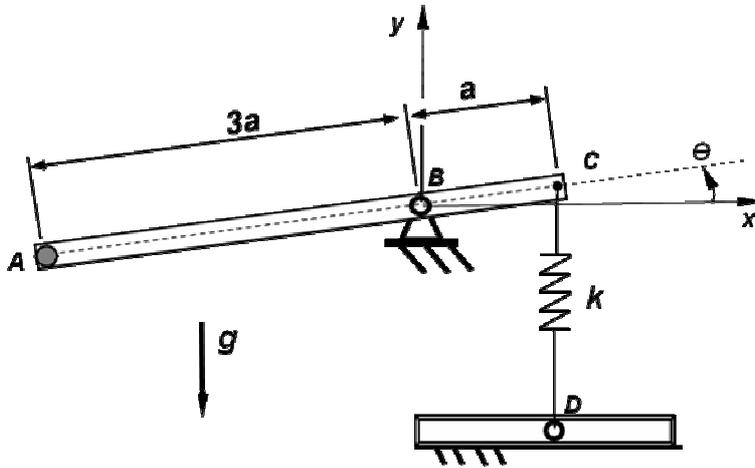
Resolva as seguintes questões:

- Qual a desvantagem em se utilizar o sistema de eixos  $OXYZ$  para descrever as equações do movimento do conjunto roldana desbalanceada+eixo ?
- Qual foi o procedimento utilizado para determinar a matriz de inércia do conjunto roldana desbalanceada + eixo ?
- Admitindo que  $\psi$  seja o ângulo  $y_1OY$ , esboce os gráficos de evolução temporal  $\psi = \psi(t)$  do ângulo de rotação do eixo e  $\omega = \omega(t)$  da sua velocidade angular supondo que, no instante inicial, ele parta do repouso, e que a massa  $m'$  se situe sobre um ponto  $P$  tal que  $\alpha$ , ângulo formado entre  $(P-O)$  e o eixo  $-y$ , seja de  $1^\circ$ .
- Esboce os mesmos gráficos de  $\psi = \psi(t)$  e  $\omega = \omega(t)$  supondo agora que o ângulo  $\alpha$  seja de  $170^\circ$ .



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

- (e) Aponte as principais diferenças observadas entre os gráficos de  $\psi = \psi(t)$  nos itens (c) e (d).
- (f) Esboce o gráfico de  $\psi = \psi(t)$  para a situação em que o eixo parte do repouso submetido a um torque dado por  $N(t) = N_0 - c\dot{\psi}(t)$ . Admita que  $\alpha = 170^\circ$ .



**QUESTÃO 3 (3,5 pontos).** O sistema da figura é composto por uma barra homogênea  $ABC$  de massa  $8m$  e que possui fixa em sua extremidade  $A$  uma partícula de massa  $m$ . Em  $B$  há uma articulação ideal. Em  $C$  acopla-se uma mola ideal de constante elástica  $k$  e que é mantida sempre na vertical devido à guia de rolete (ideal) em  $D$ . Sabendo-se que a mola está indeformada quando a barra está na horizontal e que o sistema está em equilíbrio na configuração mostrada, aplique o Princípio dos Trabalhos Virtuais para determinar, em função dos parâmetros do problema, os valores de  $\theta$  compatíveis com essa situação.



**QUESTÃO 1 – RESOLUÇÃO**

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética entre os instantes inicial e o imediatamente anterior ao choque, tem-se:

$$\frac{1}{2} J_{Az} (\omega^2 - \omega_0^2) = mg \left( \frac{\ell}{2} - h \right), \quad (1)$$

em que

$$\omega_0 \approx 0, \\ h = \frac{\ell}{2} \sin \theta = \frac{\ell}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}}} = \frac{\ell}{3}$$

E, como

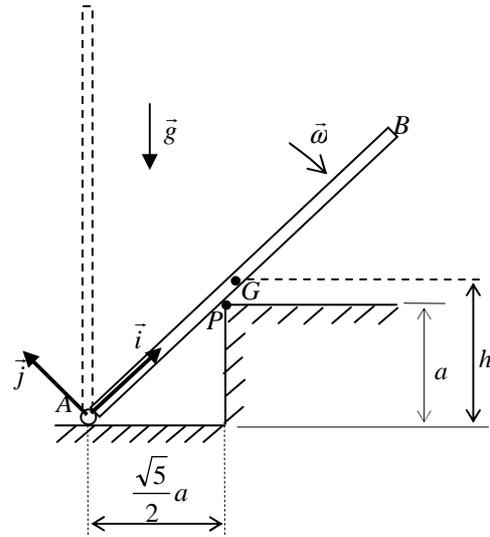
$$J_{Az} = \frac{m\ell^2}{3},$$

a equação (1) assume a forma

$$\frac{1}{2} J_{Az} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \omega^2 = mg \frac{\ell}{6},$$

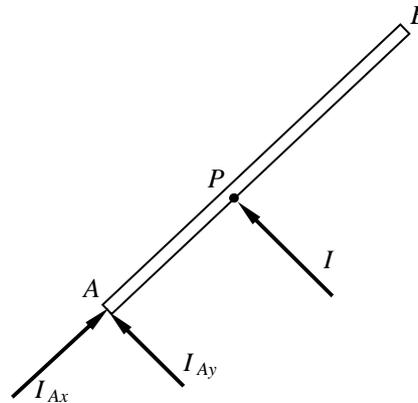
de modo que

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$



**(0,5 ponto)**

No ato de colisão contra a quina, a barra  $AB$  fica sujeita às percussões ilustradas na figura ao lado:



**(0,5 ponto)**

Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos, obtém-se:

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \vec{I} + \vec{I}_A = \vec{I} + I_{Ax} \vec{i} + I_{Ay} \vec{j} = I_{Ax} \vec{i} + (I + I_{Ay}) \vec{j} \\ \therefore m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = I_{Ax} \vec{i} + (I + I_{Ay}) \vec{j} \quad (2)$$

Imediatamente antes do choque a velocidade do baricentro da barra é:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = \vec{0} - \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{k} \wedge \frac{\ell}{2} \vec{i} \\ \therefore \vec{v}_G = -\frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{j}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Imediatamente após o choque a velocidade do baricentro da barra é:

$$\vec{v}'_G = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \wedge (G - A) = \vec{0} + \omega' \vec{k} \wedge \frac{\ell}{2} \vec{i}$$

$$\therefore \vec{v}'_G = \omega' \frac{\ell}{2} \vec{j}$$

Substituindo-se na equação (2) os valores das velocidades de  $G$  anterior e posterior ao choque obtêm-se:

$$m \left( \omega' \frac{\ell}{2} \vec{j} + \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{j} \right) = I_{Ax} \vec{i} + (I + I_{Ay}) \vec{j}$$

de onde resultam as seguintes equações escalares:

$$0 = I_{Ax} \quad (3)$$

$$m \frac{\ell}{2} \left( \omega' + \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) = I + I_{Ay} \quad (4)$$

O Teorema do Momento dos Impulsos fornece:

$$J_{Az} (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = \vec{M}_A^{ext} = I \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} \vec{k} = \frac{3}{2} I a \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{m \ell^2}{3} \left( \omega' + \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) = \frac{3}{2} I a \quad (5)$$

Da equação empírica do choque, conforme o modelo de Newton, tem-se:

$$\vec{v}'_{P-Barra} = -e \cdot \vec{v}_{P-Barra} \quad (6)$$

Mas as velocidades do ponto  $P$  imediatamente antes e após o choque são dadas, respectivamente, por:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P - A) = \vec{0} - \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{k} \wedge \frac{3a}{2} \vec{i} = -\frac{3a}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{j}$$

e por

$$\vec{v}'_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}' \wedge (P - A) = \vec{0} + \omega' \vec{k} \wedge \frac{3a}{2} \vec{i} = \frac{3a}{2} \omega' \vec{j}$$

Substituindo-se esses valores na equação (6) resulta:

$$\frac{3a}{2} \omega' \vec{j} = e \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{j},$$

ou seja:

$$\omega' = e \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Portanto, a velocidade do baricentro da barra imediatamente após o choque é:

$$\vec{v}'_G = \omega' \frac{\ell}{2} \vec{j} = e \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \vec{j}$$

(1,5 ponto)

Substituindo-se o valor de  $\omega'$  na equação (5), obtêm-se o impulso em  $P$ :

$$\frac{m \ell^2}{3} \left( e \sqrt{\frac{\ell}{g}} + \sqrt{\frac{\ell}{g}} \right) = \frac{3}{2} I a$$

$$\therefore I = \frac{2m \ell^2 (1+e)}{9a} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Substituindo-se  $\omega'$  e  $I$  na equação (4), obtêm-se o valor de  $I_{Ay}$ :

$$m \frac{\ell}{2} \left( e \sqrt{\frac{g}{\ell}} + \sqrt{\frac{g}{\ell}} \right) = \frac{2m \ell^2 (1+e)}{9a} \sqrt{\frac{g}{\ell}} + I_{Ay}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$\therefore I_{Ay} = m\ell(1+e)\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ell}{9a}\right)\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

**(0,5 ponto)**

Portanto, para que o impulso reativo em  $A$  seja nulo deve-se ter:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2\ell}{9a}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{9}\ell$$

**(0,5 ponto)**



### QUESTÃO 2 – RESOLUÇÃO

Se as equações do movimento do conjunto eixo+roldana desbalanceada fossem descritas utilizando-se coordenadas mensuradas nos eixos fixos  $OXYZ$ , as suas propriedades inerciais seriam variáveis ao longo do tempo. Assim, seria necessário acrescentar à equação do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento o termo  $\left[\frac{d}{dt} J_O\right] \cdot [\omega]$ , em

que  $\left[\frac{d}{dt} J_O\right]$  representa a derivada da matriz de inércia do corpo. A utilização de dois sistemas de referência – um fixo, em relação ao qual o movimento do corpo é referido, e outro ligado ao corpo, no qual suas propriedades geométricas e seu campo de velocidades são descritos, método proposto por Euler para a descrição do movimento de um corpo rígido, conduz à elegante forma da equação do Momento da Quantidade de Movimento, tal como ela é normalmente apresentada na literatura, ou seja:

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge m \vec{a}_O + [J_O] \cdot [\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_O] \cdot [\omega]\}.$$

(0,5 ponto)

O cálculo da matriz de inércia do corpo constituído pelo eixo  $AB$  e pela roldana desbalanceada requer a aplicação da propriedade associativa dos momentos e produtos de inércia, do Teorema dos Eixos Paralelos, e da transformação de coordenadas entre os eixos  $Oxyz$  e  $Ox_1y_1z_1$ .

Em relação ao sistema  $Oxyz$ , a matriz de inércia do conjunto roldana+massa concentrada é dada por:

$$[J_{Oxyz}]_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m'R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m'R^2 \sin^2 \alpha & -m'(-R \cos \alpha)(-R \sin \alpha) \\ 0 & -m'(-R \cos \alpha)(-R \sin \alpha) & m'R^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [J_{Oxyz}]_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore [J_{Oxyz}]_r = \begin{bmatrix} 0,5(m + 2m')r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2 + e^2) + m'r^2 \sin^2 \alpha & -m'r^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -m'r^2 \sin \alpha \cos \alpha & \frac{1}{12}m(3r^2 + e^2) + m'r^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Em relação ao sistema  $Ox_1y_1z_1$  a matriz de inércia do eixo  $AB$ , é:

$$[J_{Ox_1y_1z_1}]_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} + \frac{m\ell^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) \end{bmatrix}$$

Em relação ao mesmo sistema  $Ox_1y_1z_1$  a matriz de inércia do conjunto constituído pelo eixo  $AB$ , pela roldana e pela massa concentrada, é:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

$$\begin{aligned}
 [J_{Ox_1y_1z_1}]_{AB,r} &= \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \cdot \vec{i} & \vec{i}_1 \cdot \vec{j} & \vec{i}_1 \cdot \vec{k} \\ \vec{j}_1 \cdot \vec{i} & \vec{j}_1 \cdot \vec{j} & \vec{j}_1 \cdot \vec{k} \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{i} & \vec{k}_1 \cdot \vec{j} & \vec{k}_1 \cdot \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \cdot \vec{i} & \vec{i}_1 \cdot \vec{j} & \vec{i}_1 \cdot \vec{k} \\ \vec{j}_1 \cdot \vec{i} & \vec{j}_1 \cdot \vec{j} & \vec{j}_1 \cdot \vec{k} \\ \vec{k}_1 \cdot \vec{i} & \vec{k}_1 \cdot \vec{j} & \vec{k}_1 \cdot \vec{k} \end{bmatrix}^T \\
 \Rightarrow [J_{Ox_1y_1z_1}]_{AB,r} &= \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow [J_{Ox_1y_1z_1}]_{AB,r} &= \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 \cos \theta & \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 \sin \theta & 0 \\ -\left[ \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha \right] \sin \theta & \left[ \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha \right] \cos \theta & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta & -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta & \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow [J_{Ox_1y_1z_1}]_{AB,r} &= \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) + a_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos da matriz  $[A]$  indicada acima, chega-se às seguintes expressões da matriz de inércia do conjunto eixo  $AB$  + roldana+massa concentrada:

$$\begin{aligned}
 J_{Ox_1} &= \frac{mr^2}{2} + \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 \cos^2 \theta + \left[ \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha \right] \sin^2 \theta \\
 -J_{Ox_1y_1} &= \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 \sin \theta \cos \theta - \left[ \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha \right] \cos \theta \sin \theta \\
 -J_{Ox_1z_1} &= m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta
 \end{aligned}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

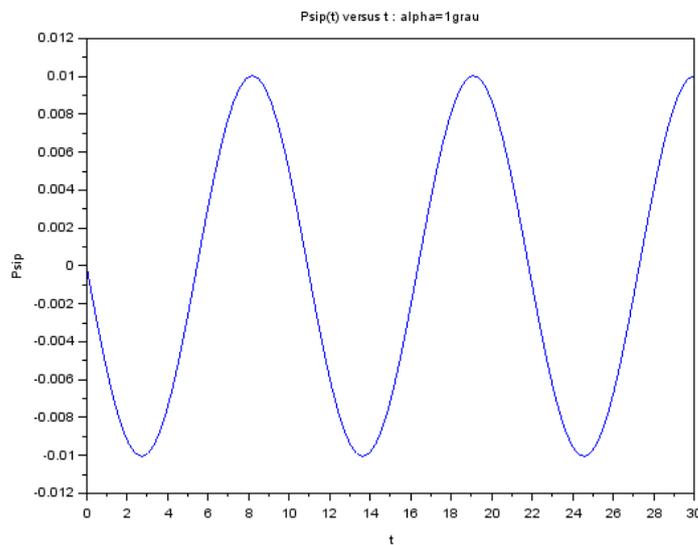
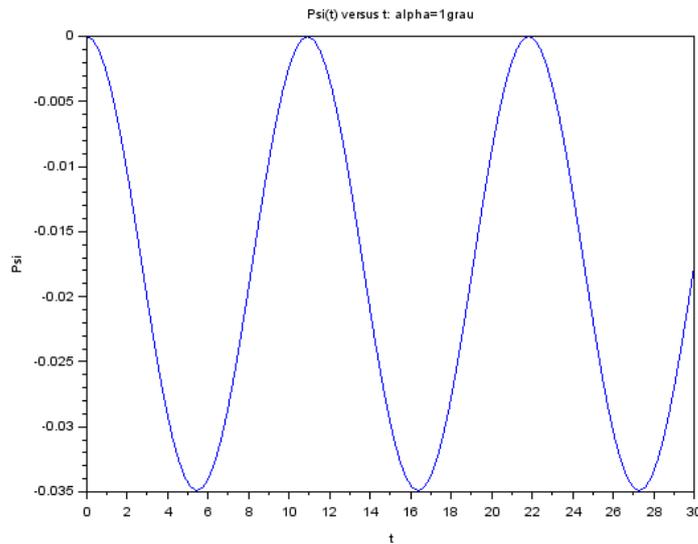
$$J_{Oy_1} = \frac{n}{12}(3r^2 + \ell^2) + \frac{1}{2}(M + 2m')R^2 \sin^2 \theta + \left[ \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \sin^2 \alpha \right] \cos^2 \theta$$

$$-J_{Oy_1z_1} = -m'R^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta$$

$$J_{Oz_1} = \frac{m}{12}(3r^2 + \ell^2) + \frac{1}{12}M(3R^2 + e^2) + m'R^2 \cos^2 \alpha$$

(0,5 ponto)

Os gráficos de  $\psi = \psi(t)$  e  $\omega = \omega(t)$  para  $\alpha = 1^\circ$ ,  $\psi(0) = 0$  e  $\omega(0) = 0$  são apresentados nas figuras a seguir:

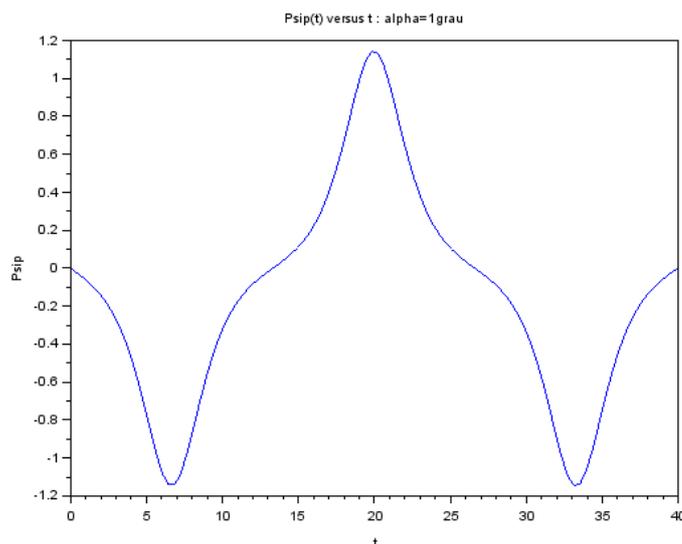
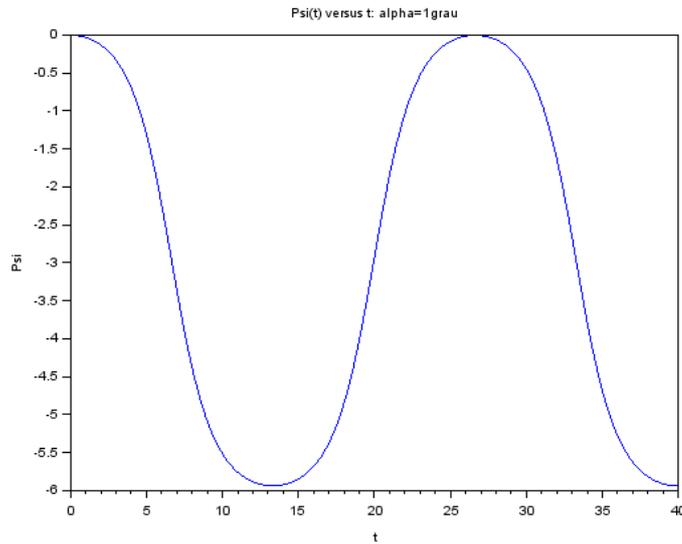


(0,5 ponto)

Os gráficos de  $\psi = \psi(t)$  e  $\omega = \omega(t)$  para  $\alpha = 170^\circ$ ,  $\psi(0) = 0$  e  $\omega(0) = 0$  são apresentados nas figuras a seguir:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



(0,5 ponto)

Comparando-se os gráficos de  $\psi = \psi(t)$  para as duas condições iniciais simuladas, observam-se as seguintes diferenças:

1ª) Os dois movimentos apresentam frequências de oscilação claramente distintas. No primeiro caso, quando  $\alpha = 1^\circ$ , o eixo oscila com frequência  $f \approx 10\text{Hz}$ ; no segundo caso, em que  $\alpha = 170^\circ$ ,  $f \approx 27\text{Hz}$ .

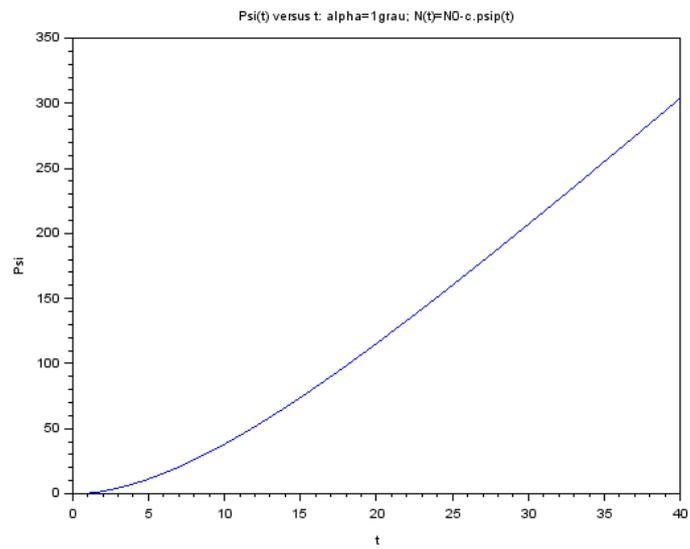
2ª) As amplitudes dos movimentos são distintas, uma vez que, sob a ação exclusiva do torque de origem gravitacional, o eixo oscila entre dois pontos extremos correspondentes aos ângulos  $\alpha$  e  $-\alpha$ ; portanto, no primeiro caso a amplitude é de  $1^\circ$  e, no segundo, de  $170^\circ$ .

2ª) As formas dos gráficos de  $\psi = \psi(t)$  são nitidamente distintas. No primeiro caso,  $\psi = \psi(t)$  aproxima-se de uma função cossenoidal  $\psi = A \cos(\omega t + \varphi)$ . No segundo, a forma da função  $\psi = \psi(t)$  afasta-se consideravelmente da característica circular. Conforme descrito na literatura,  $\psi = \psi(t)$ , para valores de  $\alpha$  crescentes  $\psi = \psi(t)$  assimila-se a uma função elíptica (função  $sn$  de Jacobi) e, no limite, quando  $\alpha \rightarrow 180^\circ$ , aproxima-se de uma função hiperbólica (função  $sh$ ).

O gráfico de  $\varphi = \varphi(t)$  para  $\alpha = 170^\circ$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$  e  $N(t) = N_0 - c\psi(t)$  é apresentado a seguir:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



**(0,5 ponto)**



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**QUESTÃO 3 = RESOLUÇÃO**

Como os vínculos em  $B$  e  $D$  são ideais, as forças vinculares não realizam trabalhos virtuais em deslocamentos compatíveis com tais vínculos. Restam, portanto, as forças peso (da massa em  $A$  e da barra, em  $G$ ) e a força elástica aplicada em  $C$ . O sistema possui um grau de liberdade, dado pela coordenada generalizada  $\theta$ .

Pelo *PTV*, tem-se:

$$\vec{F}_A \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{F}_G \cdot \delta\vec{r}_G + \vec{F}_C \cdot \delta\vec{r}_C = 0 \quad (1)$$

em que

$$\vec{F}_A = -mg\vec{j} \quad (2a)$$

$$\vec{F}_G = -8mg\vec{j} \quad (2b)$$

$$\vec{F}_C = -ky_C\vec{j} \quad (2c)$$

e

$$\vec{r}_A = y_A\vec{j} = -3a \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_G = y_G\vec{j} = -a \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_C = y_C\vec{j} = a \sin \theta \vec{j}$$

Os deslocamentos virtuais dos pontos  $A$ ,  $G$  e  $C$ , são:

$$\delta y_A = -3a \cos \theta \delta \theta \quad (3a)$$

$$\delta y_G = -a \cos \theta \delta \theta \quad (3b)$$

$$\delta y_C = a \cos \theta \delta \theta \quad (3c)$$

**(1,5 pontos)**

Substituindo-se as expressões (2) e (3) em (1), tem-se:

$$\begin{aligned} (-mg) \cdot (-3a \cos \theta \delta \theta) + (-8mg)(-a \cos \theta \delta \theta) + (-ka \sin \theta) \cdot (a \cos \theta \delta \theta) &= 0 \\ \Rightarrow (3mag \cos \theta + 8mag \cos \theta - ka^2 \sin \theta \cos \theta) \delta \theta &= 0 \end{aligned}$$

**(1,0 ponto)**

Como  $\delta \theta$  é arbitrário, resulta:

$$\cos \theta (11mg - ka \sin \theta) = 0$$

Portanto, ou

$$\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$11mg - ka \sin \theta \Rightarrow \theta = a \sin \left( \frac{11mg}{ka} \right)$$

**(1,0 ponto)**