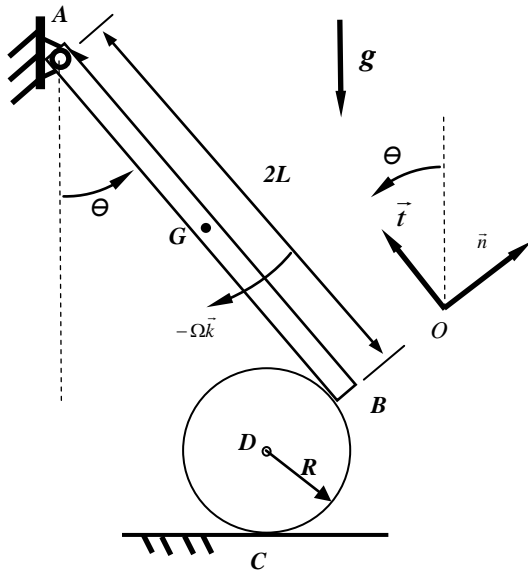




**PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 13 de maio de 2014**

**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de quaisquer dispositivos eletrônicos)**



**1ª Questão (4,0 pontos)**

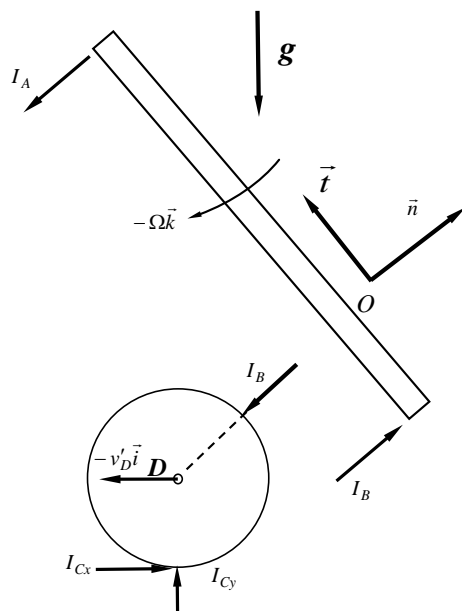
A articulação ideal A sustenta a barra homogênea AB de massa  $m$  e comprimento  $2L$ . No instante mostrado, esta barra forma um ângulo  $\theta$  com a direção vertical, possui velocidade angular constante  $\vec{\Omega} = -\Omega\vec{k}$  e choca-se contra um disco homogêneo de centro D, massa  $m$  e raio  $R$ . O choque entre a barra e o disco ocorre sem atrito. O disco está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal rugoso, cujo ponto de contato é C. Sabendo-se que, imediatamente após o impacto, o disco rola sem escorregar sobre o plano e que o coeficiente de restituição é conhecido e vale  $e$ , pedem-se, descrevendo as grandezas em relação ao sistema de coordenadas  $O\vec{n}\vec{t}$  dado:

- fazer o diagrama de forças impulsivas para a barra e para o disco;
- determinar, em função dos parâmetros dados, as velocidades angulares  $\vec{\Omega}'$  (da barra) e  $\vec{\omega}'$  (do disco) imediatamente após o choque;
- determinar o impulso reativo em B;
- determinar os impulsos reativos em A e em C.

**Solução:**

a)

**(1,0)**





b) e c)

(2,5)

Vínculos cinemáticos

<p>disco:</p> $\vec{v}_{Bd} = \vec{0}$ $\vec{v}'_{Bd} = \omega' R(\vec{i} + \vec{t})$	<p>barra:</p> $\vec{v}_B = -2L\Omega\vec{n}$ $\vec{v}'_B = 2\Omega'L\vec{n}$
---	--

Transformação de coordenadas

$$\vec{i} = \cos\theta\vec{n} - \text{sen}\theta\vec{t}$$

$$\vec{j} = \text{sen}\theta\vec{n} + \cos\theta\vec{t}$$

<p>TMI, barra, pólo A, direção <math>\vec{k}</math></p> $\frac{4mL^2}{3}(\Omega' + \Omega) = 2LI_B \quad (1)$	<p>TMI, disco, pólo C, direção <math>\vec{k}</math></p> $\frac{3mR^2}{2}\omega' = RI_B\cos\theta \quad (2)$
---	---

Hipótese de Newton:

$$\vec{v}_{Bd} = \vec{0}$$

$$(\vec{v}'_B - \vec{v}'_{Bd}) \cdot \vec{n} = -e(\vec{v}_B - \vec{v}_{Bd}) \cdot \vec{n}$$

$$2L\Omega' - \omega'R\cos\theta = 2Le\Omega \quad (3)$$

Resolve-se o sistema (1), (2), (3):

<p>de (1) e (2)</p> $\frac{2mL}{3}(\Omega' + \Omega) = \frac{3mR}{2\cos\theta}\omega' \rightarrow \frac{4L\cos\theta}{9R}(\Omega' + \Omega) = \omega'$ <p>em (3)</p> $2L\Omega' - \frac{4L\cos\theta}{9R}(\Omega' + \Omega)R\cos\theta = 2Le\Omega$ $\left(2L - \frac{4L\cos^2\theta}{9}\right)\Omega' = \left(2Le + \frac{4L\cos^2\theta}{9}\right)\Omega$ $(9 - 2\cos^2\theta)\Omega' = (9e + 2L\cos^2\theta)\Omega$ $\therefore \Omega' = \frac{9e + 2\cos^2\theta}{9 - 2\cos^2\theta}$	<p>Decorre que:</p> $\omega' = \frac{4L\cos\theta}{9R} \left( \frac{9e + 2\cos^2\theta}{9 - 2\cos^2\theta} + 1 \right) \Omega$ $\omega' = \frac{4L\cos\theta(1+e)}{R(9 - 2\cos^2\theta)} \Omega$ <p>e,</p> $\frac{3mR}{2\text{sen}\theta}\omega' = I_B \rightarrow$ $I_B = \frac{3mR}{2\cos\theta} \frac{4L\cos\theta(1+e)}{R(9 - 2\cos^2\theta)} \Omega \rightarrow$ $I_B = \frac{6mL(1+e)}{(9 - 2\cos^2\theta)} \Omega$
--	---

d)

(0,5)

Para obter o impulso reativo em A aplica-se o TRI à barra AB. Como a velocidade do baricentro da barra possui somente a componente na direção  $\vec{n}$  pode-se escrever:

$$m(v'_G - v_G) = I_B - I_A \rightarrow mL(\Omega' + \Omega) = I_B - I_A$$



De (1)

$$\frac{4mL^2}{3}(\Omega' + \Omega) = 2LI_B$$

$$(\Omega' + \Omega) = \frac{3}{2mL} I_B \rightarrow$$

$$mL \frac{3}{2mL} I_B = I_B - I_A \rightarrow$$

$$I_A = -\frac{I_B}{2} = -\frac{3mL(1+e)}{(9-2\cos^2\theta)} \Omega$$

Para obter os impulsos reativos em C, aplica-se o TRI ao disco. O baricentro do disco possui, imediatamente após o impacto, velocidade horizontal. Portanto,

$$m(v'_D - v_D) = -I_B \cos \theta \vec{i} - I_B \sin \theta \vec{j} + I_{Cx} \vec{i} + I_{Cy} \vec{j} \rightarrow$$

$$-mR\omega' \vec{i} = -I_B \cos \theta \vec{i} - I_B \sin \theta \vec{j} + I_{Cx} \vec{i} + I_{Cy} \vec{j} \rightarrow$$

$$(\vec{i}): -mR\omega' = -I_B \cos \theta + I_{Cx}$$

$$(\vec{j}): I_{Cy} = I_B \sin \theta$$

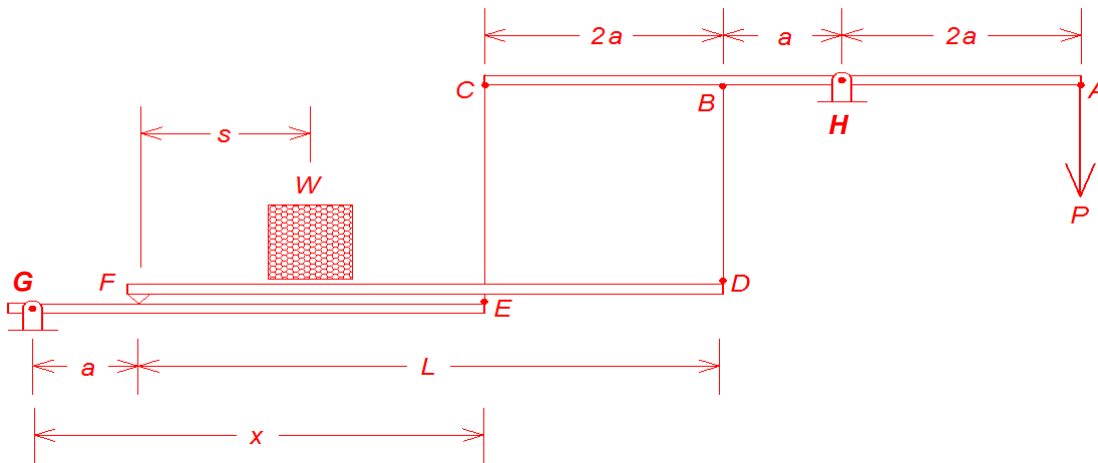
$$I_{Cy} = \frac{6mL(1+e)}{(9-2\cos^2\theta)} \Omega \sin \theta$$

$$I_{Cx} = -mR \frac{4L \cos \theta (1+e)}{R(9-2\cos^2\theta)} \Omega + \frac{6mL(1+e)}{(9-2\cos^2\theta)} \Omega \cos \theta$$

$$I_{Cx} = \frac{2mL \cos \theta (1+e)}{(9-2\cos^2\theta)} \Omega$$

**2ª Questão** (3,0 pontos)

A figura representa um mecanismo de uma balança de plataforma que é usada para medir um peso  $W$ . Os cabos  $CE$  e  $BD$  são ideais e permanecem sempre esticados. Os vínculos em  $F$  (apoio simples),  $G$  e  $H$  (articulações) também são ideais. O cabo  $CE$  passa por um furo através da barra  $DF$ . A configuração mostrada (todas as barras na horizontal) é de equilíbrio do sistema. É possível ajustar o comprimento  $x$  de forma que a relação entre o peso da balança  $P$  e a carga  $W$  não dependa da sua posição  $s$  na plataforma  $FD$ . Usando o Princípio do Trabalho Virtual, determine este valor de  $x$  e a relação correspondente entre  $P$  e  $W$ . Despreze os pesos das barras, pois elas são comumente compensadas por um contrapeso não mostrado na figura.

**Solução:**

Sejam  $\delta y_A$  e  $\delta y_W$  os deslocamentos virtuais verticais aplicados, respectivamente, aos pontos  $A$  e  $W$ , considerados positivos quando para baixo. Então, pelo PTV:

$$W\delta y_W + P\delta y_A = 0 \quad (1,0)$$

Mas  $\delta y_A$  e  $\delta y_W$  não são independentes. Então precisamos procurar a relação geométrica que existe entre eles. Para isso apliquemos uma rotação virtual  $\delta\theta$  à barra  $AC$  no sentido horário. Assim:

i)  $\delta y_A = 2a\delta\theta$

ii)  $\delta y_B = -a\delta\theta$

iii)  $\delta y_C = -3a\delta\theta$

iv)  $\delta y_D = \delta y_B = -a\delta\theta$

v)  $\delta y_E = \delta y_C = -3a\delta\theta$

vi)  $\frac{\delta y_F}{a} = \frac{\delta y_E}{x} \Rightarrow \delta y_F = -3\frac{a^2}{x}\delta\theta$



$$\begin{aligned} \text{vii) } \frac{\delta y_W - \delta y_F}{s} &= \frac{\delta y_D - \delta y_F}{L} \Rightarrow \delta y_W = \delta y_F + \frac{s}{L}(\delta y_D - \delta y_F) \Rightarrow -3 \frac{a^2}{x} \delta \theta + \frac{s}{L}(-a \delta \theta + \frac{3a^2}{x} \delta \theta) \\ &\Rightarrow \delta y_W = \left[ -3 \frac{a^2}{x} + \frac{s}{L}(-a + \frac{3a^2}{x}) \right] \delta \theta \end{aligned}$$

Usando i e vii na equação do PTV vem:

$$W \left[ -3 \frac{a^2}{x} + \frac{s}{L}(-a + \frac{3a^2}{x}) \right] \delta \theta + P2a \delta \theta = 0 \Rightarrow \left\{ W \left[ -3 \frac{a^2}{x} + \frac{s}{L}(-a + \frac{3a^2}{x}) \right] + P2a \right\} \delta \theta = 0$$

Como  $\delta \theta$  é arbitrário, então:

$$W \left[ -3 \frac{a^2}{x} + \frac{s}{L}(-a + \frac{3a^2}{x}) \right] + P2a = 0 \quad (1,0)$$

e, portanto,

$$\frac{W}{P} = \frac{2a}{3 \frac{a^2}{x} - \frac{s}{L}(-a + \frac{3a^2}{x})}$$

Para que essa relação não dependa de  $s$  e necessário, então, que

$$-a + \frac{3a^2}{x} = 0 \Rightarrow x = 3a \quad (0,5)$$

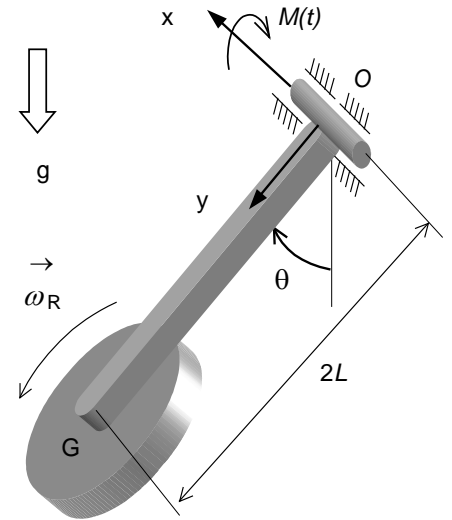
e, nesse caso,

$$W = 2P \quad (0,5)$$

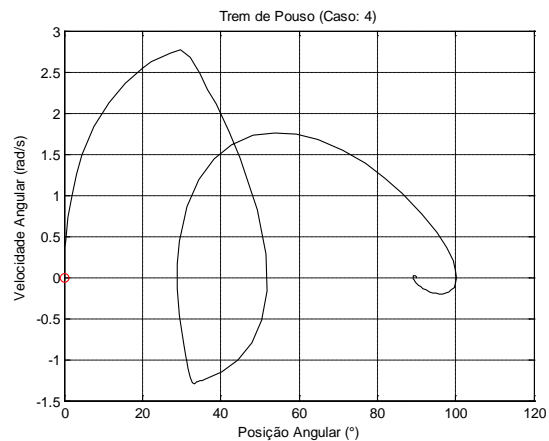
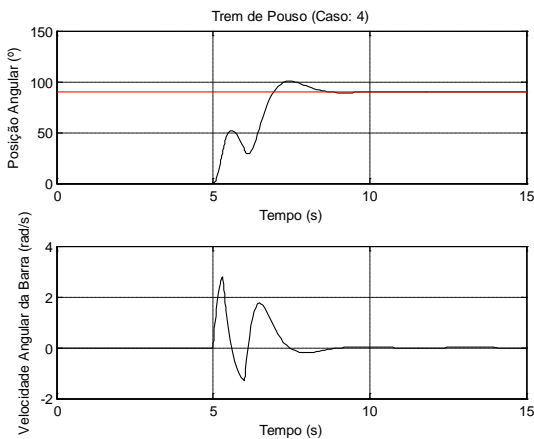
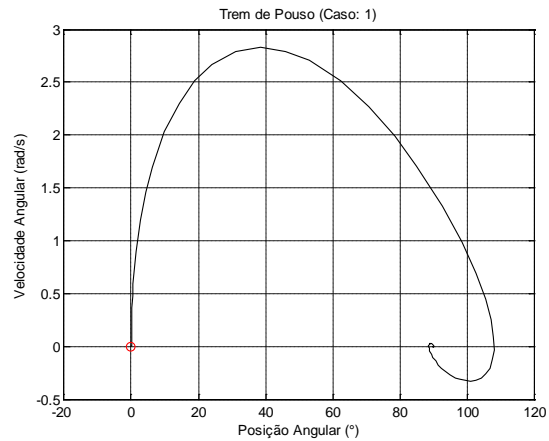
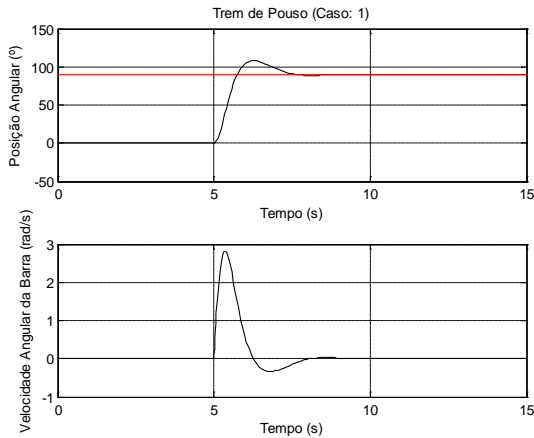


3ª Questão (3,0 pontos)

O exercício de modelagem e simulação computacional – EMSC –, apresenta um sistema equivalente a um trem de pouso de um avião, acionado por um motor de torque  $\vec{M}(t) = M(t)\vec{i}$  que tem eixo lubrificado com graxa de forma a produzir um torque viscoso do tipo  $TV(t) = -c\dot{\theta}(t)$  na direção  $Ox$ , conforme mostrado na figura ao lado. Considere a roda como um disco delgado de raio  $R$ , massa  $mr$  e momentos de inércia  $J_{Gx} = J_{Gy} = J$ ,  $J_{Gz} = 2J$ . A barra  $OG$  tem massa  $mb$  e comprimento  $2L$ . Considerando o descrito acima pede-se:



- Deduza novamente a equação de movimento angular da barra do trem de pouso na coordenada  $\vec{\theta} = \theta\vec{i}$  e a equação do momento no mancal  $O$  na direção  $y$ .
- Descreva e interprete cada resultado gráfico do sistema simulado e descreva sucintamente a diferença entre os dois primeiros e os dois últimos.
- Na análise de funcionamento do sistema foi proposto realizar a operação de recolhimento do trem de pouso com a roda sendo freada. Descreva e justifique sucintamente o benefício obtido.





*Solução:*

a)

$$\left( \frac{4}{3}mbL^2 + \frac{1}{4}mrR^2 + 4mrL^2 \right) \ddot{\theta} = M(t) - (mb + 2mr)Lg \sin \theta - c\dot{\theta} \quad (1,0)$$

$$-2J \dot{\theta} \dot{\phi} = M_{oy}$$

b) O primeiro gráfico corresponde à posição angular e velocidade angular da barra sendo acionada pelo motor a partir do instante  $t = 5$  segundos. O segundo gráfico corresponde à posição angular versus a velocidade angular da barra. Os dois últimos gráficos correspondem à situação de falha do motor que ocorre no instante  $t = 6$  segundos e tem duração de 0,7 segundos (Análise n° 4). **(1,0)**

c) O momento reativo no mancal em O na direção y é dado por  $M_{oy} = -2J \dot{\theta} \dot{\phi}$  e durante a frenagem tem valor reduzido devido ao fato de ser uma função da velocidade angular da roda ( $\dot{\phi}$ ) e causa o benefício de diminuir a sollicitação no mancal. **(1,0)**