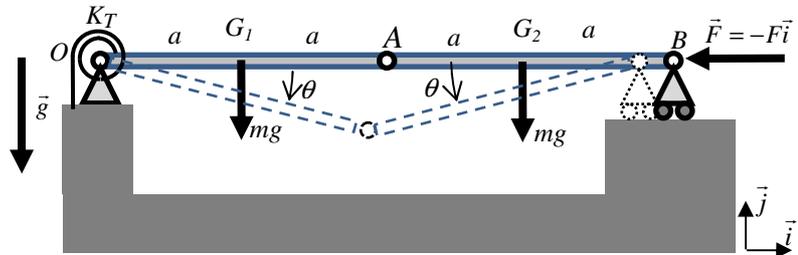




Mecânica – B – PME 2200 – 2ª. Prova – 22/05/2012

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

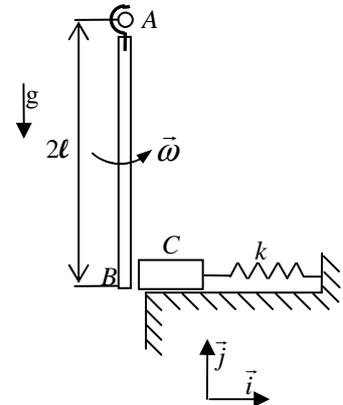
QUESTÃO 1 (3,5 pontos). A figura mostra um sistema composto por duas barras homogêneas idênticas, cada uma de comprimento $2a$ e massa m . As barras são articuladas entre si, em A , e nas duas extremidades O e B . Na extremidade O da barra está instalada uma mola de torção linear de constante K_T , que restringe elasticamente o movimento angular relativo entre as barras através de um torque linearmente proporcional ao ângulo θ . Uma força horizontal $\vec{F} = -F\vec{i}$ é aplicada em B . Pedem-se:



(a) escrever os deslocamentos virtuais δB , δG_1 , δG_2 , dos pontos B , G_1 e G_2 , como funções do deslocamento virtual $\delta\theta$;

(b) utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduzir a equação de equilíbrio na coordenada generalizada θ .

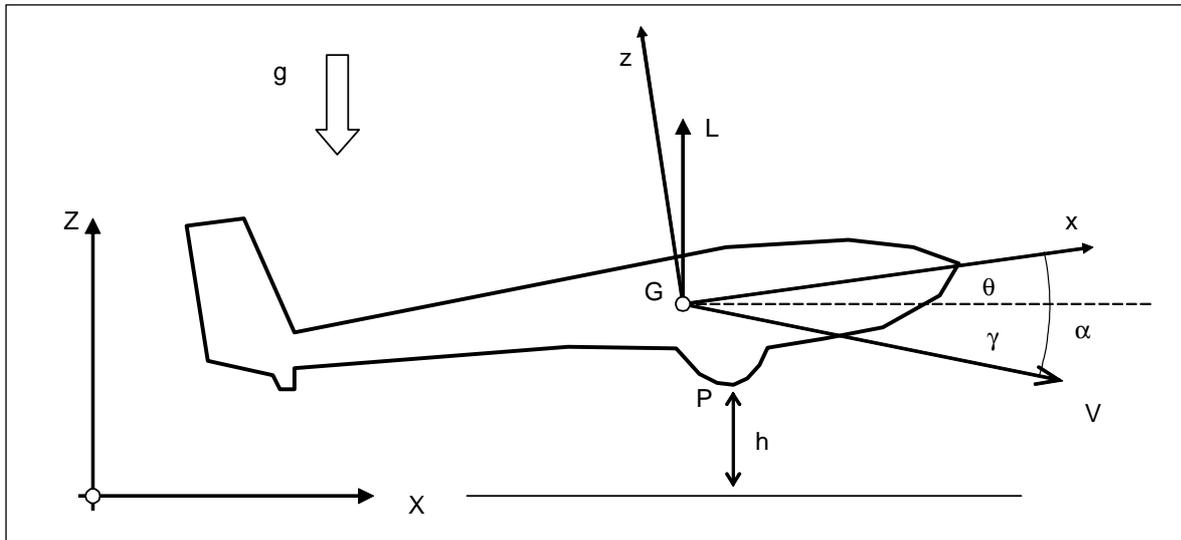
QUESTÃO 2 (3,5 pontos). A extremidade A de uma barra AB de massa m e comprimento 2ℓ é ligada a um gancho de dimensões desprezíveis engatado a um pino imóvel. Admite-se que não ocorra desenganchamento antes do evento do choque. No instante ilustrado na figura, a barra realiza um movimento de rotação em torno do pino com velocidade angular ω , imediatamente antes de se chocar contra um bloco de massa M , inicialmente em repouso, ligado a uma parede vertical por meio de uma mola linear de constante elástica k . Desprezando os efeitos do atrito e admitindo que o coeficiente de restituição associado ao choque entre o bloco e a barra seja e ($e \neq 0$), pede-se:



- desenhar o diagrama de impulsos sobre a barra e sobre o bloco;
- determinar a velocidade angular ω' da barra imediatamente após o choque;
- calcular a deformação máxima da mola.

QUESTÃO 3 (3,0 pontos). O segundo exercício de modelagem e simulação computacional (EMSC#2) solicitou a análise do pouso de um planador de massa m , momento de inércia J_{Gy} e cuja posição do ponto inferior do trem de pouso, em relação ao baricentro, é $(P - G) = -0,1\vec{i} - 0,5\vec{k}$ (medida no sistema de eixos móveis $Gxyz$, conforme indicado na figura). Na aproximação com a pista, o planador exibe ângulo de atitude θ , velocidade absoluta $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_z\vec{k}$ (expressa no referencial fixo) e velocidade angular $\omega = \dot{\theta} = 0$. Sabendo que a força de sustentação vertical agente no baricentro é descrita por uma função $L = L(\alpha, \gamma, V)$, realize as seguintes tarefas:

- deduza as equações para cálculo da velocidade vertical do baricentro (V'_z) expressa no referencial fixo (XYZ) e da velocidade angular (ω') do planador imediatamente após o impacto com a pista de pouso;
- esboce os diagramas da história temporal da posição e da velocidade verticais do baricentro do planador, admitindo a seguinte condição: $\theta = 5^\circ$, velocidade inicial $\vec{V} = 10\vec{i} - 1\vec{k}$ (m/s), altura $h = 5$ m (distância inicial do ponto inferior do trem de pouso à pista), impacto perfeitamente plástico ($e = 0$);
- esboce o diagrama da história temporal da velocidade angular do planador para a mesma condição inicial indicada no item (b).



QUESTÃO 4 (1,0 ponto). Responda as questões abaixo, justificando claramente, seja por meio de enunciados, seja por meio de equações. Para cada item dê exemplos ilustrativos.

- Do ponto de vista matemático, o que difere um vínculo holônomo de um não-holônomo?
- O que distingue um vínculo bilateral de um unilateral?
- Do ponto de vista operacional, explique como se aplica o *PTV* na determinação de reações vinculares.



QUESTÃO 1: Resolução

(a) As posições dos pontos B , G_1 e G_2 são escritas, na base canônica da figura:

$$(B - O) = 4a \cos \theta \vec{i}$$

$$(G_1 - O) = a(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \quad (0,5)$$

$$(G_2 - O) = a(3 \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

Delas decorrem os respectivos deslocamentos virtuais, expressos em função de $\delta\theta$:

$\begin{aligned} \delta B &= -4a \delta\theta \sin \theta \vec{i} \\ \delta G_1 &= -a \delta\theta (\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \\ \delta G_2 &= -a \delta\theta (3 \sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \end{aligned}$.	(0,5)
--	---	-------

(b) Pelo PTV, podemos escrever:

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_g + \delta W_E = 0 \quad (0,5)$$

onde, os trabalhos virtuais associados, respectivamente, à força aplicada em B , às forças-peso e ao torque restaurador elástico, são dados por:

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \vec{F} \cdot \delta B = 4Fa \delta\theta \sin \theta \\ \delta W_g &= -mg\vec{j} \cdot \delta G_1 - mg\vec{j} \cdot \delta G_2 = 2mga \delta\theta \cos \theta \\ \delta W_E &= -\theta K_T \delta\theta \end{aligned} \quad (1,0)$$

Decorre, então:

$$(4F \sin \theta + 2mga \cos \theta - \theta K_T) \delta\theta = 0 \quad (0,5)$$

E desta, a equação de equilíbrio:

$2 \frac{F}{mg} \sin \theta + \cos \theta - \frac{K_T \theta}{2mga} = 0$.	(0,5)
--	---	-------

A solução desta equação fornece o ângulo de equilíbrio.

OBS:

- (1) Evidentemente, procura-se a solução de equilíbrio no quadrante $0 < \theta_{eq} < \pi/2$. Deve-se, adicionalmente, estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio, o que se consegue, por exemplo, através de uma expansão em série de Taylor em torno deste ponto e de uma análise apropriada.
- (2) Note também que este é um modelo bastante simplificado, análogo do problema de flambagem de uma viga sob a ação de seu próprio peso. Note também que o 'ponto de instabilidade', ou de 'bifurcação de equilíbrio' ou ainda, a 'carga de flambagem', poderia ser avaliado. Basta considerar a equação de equilíbrio linearizada, ($\theta \ll 1$), na forma:

$$\left(\frac{K_T}{mga} - \frac{4F}{mg} \right) \theta = 1$$



Ou seja:

$$\theta = \left(\frac{K_T}{mga} - \frac{4F}{mg} \right)^{-1}$$

De fato, esta equação torna-se singular quando a magnitude da força, crescente a partir do valor nulo, atinge:

$$F_{cr} = \frac{K_T}{4a}.$$

Note que a carga crítica (carga de Euler) de flambagem de uma viga, de comprimento $L=4a$ e produto de rigidez flexional EI , é dada por:

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = \pi^2 \frac{EI}{16a^2},$$

de forma que uma mola (de torção) equivalente, do ponto de vista de flambagem, será dada por,

$$K_T = \pi^2 \frac{EI}{4a} = F_{cr} 4a = F_{cr} L.$$

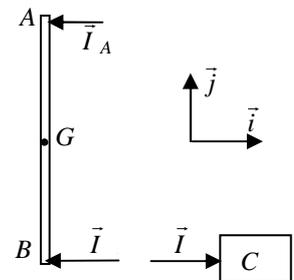
Este é um 'primeiro modelo discreto' da flambagem de uma viga.

QUESTÃO 2. Resolução

I. HIPÓTESE 1: Manutenção do contacto durante o choque

I-a. Diagrama de impulsos

Admitiremos, inicialmente, que não ocorra desenganchamento durante o ato do choque, ou seja, que o impulso aplicado ao gancho A tenha o sentido indicado na figura ao lado.



Resposta (a)

Esse diagrama de impulsos dá origem à modelagem que se apresenta a seguir.

I-b. Aplicação do Teorema da Resultante dos Impulsos à barra

$$\vec{v}_G = \omega \vec{k} \wedge (-\ell \vec{j}) = \omega \ell \vec{i}$$

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \vec{I} + \vec{I}_A \Rightarrow \vec{v}'_G = \vec{v}_G + \frac{\vec{I}}{m} = \omega \ell \vec{i} - \frac{(I + I_A) \vec{i}}{m}$$

$$\therefore \vec{v}'_G = \left(\omega \ell - \frac{I + I_A}{m} \right) \vec{i}$$

(1)

I-c. Aplicação do Teorema da Resultante dos Impulsos ao bloco

$$M(\vec{v}'_C - \vec{v}_C) = \vec{I} \Rightarrow M(\vec{v}'_C - \vec{0}) = \vec{I}$$



$$\therefore \vec{v}'_C = \frac{I}{M} \vec{i} \quad (2)$$

I-d. *Aplicação do Teorema do Momento dos Impulsos à barra, em relação ao pólo A.*

$$\begin{aligned} \vec{H}'_A - \vec{H}_A &= m(G-A) \wedge (\vec{v}'_A - \vec{v}_A) + J_{A_y}(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = (B-A) \wedge (-I\vec{i}) \\ \Rightarrow -m\ell\vec{j} \wedge (\vec{v}'_A - \vec{0}) + J_{A_z}(\omega'\vec{k} - \omega\vec{k}) &= -2\ell\vec{j} \wedge (-I\vec{i}) \\ \Rightarrow -m\ell\vec{j} \wedge \vec{v}'_A + J_{A_z}(\omega' - \omega)\vec{k} &= -2\ell I\vec{k} \\ \Rightarrow -m\ell\vec{j} \wedge v'_A\vec{i} + J_{A_z}(\omega' - \omega)\vec{k} &= -2\ell I\vec{k} \\ \Rightarrow m\ell v'_A\vec{k} + J_{A_z}(\omega' - \omega)\vec{k} &= -2\ell I\vec{k} \\ \therefore \vec{\omega}' &= \left(\omega - \frac{m}{J_{A_z}} \ell v'_A - \frac{2\ell}{J_{A_z}} I \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (3)$$

I-e. *Equação empírica para o choque entre a barra e o bloco*

$$\begin{aligned} \Delta u' &= -e\Delta u \Rightarrow \vec{v}'_B - \vec{v}'_C = -e(\vec{v}_B - \vec{v}_C) = -e(\vec{v}_B - \vec{0}) \\ \Rightarrow \vec{v}'_C - \vec{v}'_B &= e\vec{v}_B = e2\omega\ell\vec{i} \\ \Rightarrow \vec{v}'_C - \vec{v}'_B &= e2\omega\ell\vec{i} \quad \therefore \vec{v}'_C - \vec{v}'_B = e2\omega\ell\vec{i} \end{aligned} \quad (4)$$

I-f. *Equação empírica para o choque entre o gancho e o pino*

Admite-se, nesse caso, que o gancho tente violar o vínculo, ou seja, que ocorra choque entre o gancho e o pino. Tem-se, portanto:

$\vec{v}'_{A,\text{gancho}} - \vec{v}'_{A,\text{pino}} = -\bar{e}(\vec{v}_{A,\text{gancho}} - \vec{v}_{A,\text{pino}})$, onde \bar{e} é o coeficiente de restituição para o choque dos materiais do pino e do gancho.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v}'_{A,\text{gancho}} - \vec{0} &= -\bar{e}(\vec{0} - \vec{0}) \\ \Rightarrow \vec{v}'_{A,\text{gancho}} &= \vec{v}'_A = \vec{0} \end{aligned} \quad (5)$$

I-g. *Vínculos cinemáticos*

$$\begin{aligned} \vec{v}'_B &= \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \wedge (B-A) = \vec{0} + \omega'\vec{k} \wedge (-2\ell\vec{j}) \\ \therefore \vec{v}'_B &= 2\omega'\ell\vec{i} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}'_G &= \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \wedge (G-A) = \vec{0} + \omega'\vec{k} \wedge (-\ell\vec{j}) \\ \therefore \vec{v}'_G &= \omega'\ell\vec{i} \end{aligned} \quad (7)$$

I-h. *Resolução do sistema de equações*

Resolvendo-se o sistema de 7 equações a 7 incógnitas, $I, I_A, v'_A, v'_B, v'_C, v'_G, \omega'$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{m-3Me}{m+3M} \omega & v'_G &= \frac{m-3Me}{m+3M} \omega\ell & v'_B &= \frac{2m-6Me}{m+3M} \omega\ell & v'_C &= \frac{2m(1+e)}{m+3M} \omega \\ I &= \frac{2mM(1+e)}{m+3M} \omega\ell & I_A &= \frac{mM(1+3e)}{m+3M} \omega\ell & v'_A &= 0 \end{aligned}$$

Os resultados acima são consistentes, pois a velocidade do gancho, v'_A , imediatamente após o choque, é nula. Nota-se, nesse caso, que a barra realiza um ato instantâneo de rotação com velocidade angular ω' .

Resposta (b)



Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética ao bloco imediatamente após a ocorrência do choque, a máxima deformação da mola se verifica quando a a energia cinética do bloco se anula, ou seja:

$$0 - \frac{Mv'_c{}^2}{2} = -\frac{k\Delta x^2}{2} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{M}{k}} v'_c$$

onde

$$v'_c = \frac{2m(1+e)}{m+3M} \omega \ell$$

Logo, resulta:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{M}{k}} \frac{2m(1+e)}{m+3M} \omega \ell$$

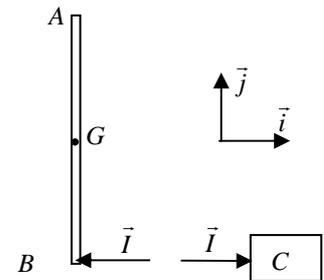
Resposta (c)

II. HIPÓTESE 2. Perda de contacto durante o choque

II-a. Diagrama de impulsos

Admitiremos que o gancho A realize, após o choque, movimento na direção $-\vec{i}$, desvinculando-se, portanto, do pino. Em tal caso não ocorre impulso reativo em A, conforme ilustrado na figura ao lado..

(Resposta a)



Esse diagrama de impulsos dá origem à modelagem que se apresenta a seguir.

II-b. Aplicação do Teorema da Resultante dos Impulsos à barra

$$\vec{v}_G = \omega \vec{k} \wedge (-\ell \vec{j}) = \omega \ell \vec{i}$$

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = \vec{I} \Rightarrow \vec{v}'_G = \vec{v}_G + \frac{\vec{I}}{m} = \omega \ell \vec{i} - \frac{I \vec{i}}{m}$$

$$\therefore \vec{v}'_G = \left(\omega \ell - \frac{I}{m} \right) \vec{i} \quad (1)$$

II-c. Aplicação do Teorema da Resultante dos Impulsos ao bloco

$$M(\vec{v}'_C - \vec{v}_C) = \vec{I} \Rightarrow M(\vec{v}'_C - \vec{0}) = I \vec{i}$$

$$\therefore \vec{v}'_C = \frac{I}{M} \vec{i} \quad (2)$$

II-d. Conservação da quantidade de movimento da barra na direção y

Como não existem impulsos aplicados na direção y, a componente vertical da velocidade da barra não se altera por ocasião do choque, ou seja:

$$v'_{Gy} = v_{Gy} = 0$$

II-e. Aplicação do Teorema do Momento dos Impulsos à barra, em relação ao pólo A.

$$\vec{H}'_A - \vec{H}_A = m(G - A) \wedge (\vec{v}'_A - \vec{v}_A) + J_{A,y}(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = (B - A) \wedge (-I \vec{i})$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow -m\vec{\ell}\vec{j} \wedge (\vec{v}'_A - \vec{0}) + J_{Az}(\omega'\vec{k} - \omega\vec{k}) = -2\ell\vec{j} \wedge (-\vec{i}) \\ &\Rightarrow -m\vec{\ell}\vec{j} \wedge \vec{v}'_A + J_{Az}(\omega' - \omega)\vec{k} = -2\ell I\vec{k} \\ &\Rightarrow -m\vec{\ell}\vec{j} \wedge v'_A\vec{i} + J_{Az}(\omega' - \omega)\vec{k} = -2\ell I\vec{k} \\ &\Rightarrow m\ell v'_A\vec{k} + J_{Az}(\omega' - \omega)\vec{k} = -2\ell I\vec{k} \\ &\Rightarrow \vec{\omega}' = \left(\omega - \frac{m}{J_{Az}}\ell v'_A - \frac{2\ell}{J_{Az}}I \right)\vec{k} \end{aligned}$$

Como $J_{Az} = \frac{m(2\ell)^2}{3}$, resulta

$$\vec{\omega}' = \left(\omega - \frac{3}{4\ell}v'_A - \frac{3}{2m\ell}I \right)\vec{k} \quad (3)$$

II-f. *Equação empírica para o choque excêntrico*

$$\begin{aligned} \Delta u' = -e\Delta u &\Rightarrow \vec{v}'_B - \vec{v}'_C = -e(\vec{v}_B - \vec{v}_C) = -e(\vec{v}_B - \vec{0}) \\ &\Rightarrow \vec{v}'_C - \vec{v}'_B = e\vec{v}_B = e2\omega\ell\vec{i} \\ \therefore \vec{v}'_C &= \vec{v}'_B + e2\omega\ell\vec{i} \end{aligned} \quad (4)$$

II-g. *Vínculos cinemáticos*

$$\begin{aligned} \vec{v}'_B &= \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \wedge (B - A) = \vec{v}'_A + \omega'\vec{k} \wedge (-2\ell\vec{j}) \\ \therefore \vec{v}'_B &= (v'_A + 2\omega'\ell)\vec{i} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}'_G &= \vec{v}'_A + \vec{\omega}' \wedge (G - A) = \vec{v}'_A + \omega'\vec{k} \wedge (-\ell\vec{j}) \\ \therefore \vec{v}'_G &= (v'_A + \omega'\ell)\vec{i} \end{aligned} \quad (6)$$

II-h. *Resolução do sistema de equações*

Resolvendo-se o sistema de 6 equações a 6 incógnitas

$$I, v'_G, v'_A, v'_B, v'_C, \omega'$$

obtêm-se:

$$\omega' = \frac{m - 2M - 6Me}{4M + m}\omega \quad I = 2(1 + e)\frac{Mm}{4M + m}\omega\ell \quad v'_C = 2(1 + e)\frac{m}{4M + m}\omega\ell$$

$$v'_G = \frac{2M(1 - e) + m}{4M + m}\omega\ell \quad v'_A = \frac{4M}{4M + m}(1 + e)\omega\ell$$

Analisando-se o sinal de v'_A , observa-se que:

$$v'_A > 0$$

Para que houvesse desenganchamento, seria necessário que o gancho se afastasse do pino, ou seja, que sua velocidade imediatamente após o choque tivesse a direção $-\vec{i}$. Conforme mostrado acima, tal não ocorre. Portanto, a hipótese de que ocorra desenganchamento é inconsistente.

Essa hipótese, aliás, poderia ter sido descartada desde o início, pois o ponto de impacto B entre a barra e o bloco se encontra, relativamente ao ponto A , além do centro de percussão C_P ($|C_P - A| = \frac{2}{3}(2\ell) = \frac{4}{3}\ell$).

Haveria desenganchamento caso B se situasse a uma distância d , medida a partir de A , tal que:



$$d = |B - A| \leq \frac{4}{3} \ell$$

(Resposta b)

QUESTÃO 3. Resolução

1. Estados anteriores e posteriores ao choque

As equações que governam o movimento do planador antes e após a ocorrência do choque são apresentadas a seguir:

- *Movimento ao longo do eixo X*

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2} \rho C_D V^2 \approx 0, \quad (1)$$

uma vez que, conforme o enunciado do problema, admite-se que o arrasto é desprezível por ocasião da aterrissagem.

- *Movimento em torno do eixo y*

$$J_{Gy} \ddot{\theta} = 0, \quad (2)$$

pois, de acordo com o enunciado do problema, a força de sustentação é aplicada no baricentro do planador. Portanto, resulta que:

$$\dot{\theta} = \omega = \text{const.} \quad (3)$$

Segundo o enunciado, o planador aterrissa com ângulo de atitude θ constante. Logo, conclui-se que:

$$\dot{\theta} = \omega = 0 \quad (4)$$

- *Movimento ao longo do eixo Z*

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -mg + \frac{1}{2} \rho (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \cdot A \cdot \left[0,092 \cdot (\theta - \tan^{-1}(\dot{z}/\dot{x})) \cdot \frac{180}{\pi} + 0,55 \right] \\ \Rightarrow \ddot{z} &= -g + \frac{1}{2m} \rho (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \cdot A \cdot \left[0,092 \cdot (\theta - \tan^{-1}(\dot{z}/\dot{x})) \cdot \frac{180}{\pi} + 0,55 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

2. O evento do choque

Para determinar o novo estado cinemático do planador imediatamente após a ocorrência do choque, ou seja, quando

$$zG = -xG \sin \theta - zG \cos \theta,$$

serão aplicadas as equações do teorema da resultante dos impulsos e do teorema do momento dos impulsos, descritas a seguir:

- V_{GX}

$$m(v'_{Gx} - v_{Gx}) = I_x = 0 \Rightarrow v'_{Gx} = v_{Gx}, \quad (6)$$

pois, de acordo com o enunciado do problema, deve-se desprezar o impulso horizontal devido ao atrito.

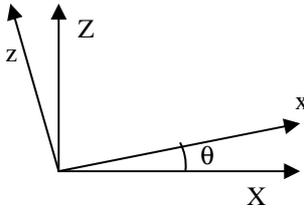
- V_{GZ}



$$m(v'_{Gz} - v_{Gz}) = I_z = I \Rightarrow v'_{Gz} = v_{Gz} + \frac{I}{m}, \quad (7)$$

▪ *Velocidade angular*

$$J_{Gy}(\omega' - \omega) = (P - G) \wedge I\vec{K} = (x_G \vec{i} + z_G \vec{k}) \wedge I\vec{K}, \quad (8)$$



Descrevendo-se os versores **ijk** em termos de **IJK**, tem-se:

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{I})\vec{I} + (\vec{i} \cdot \vec{K})\vec{K} = \cos \theta \vec{I} + \cos(90 - \theta)\vec{K} = \cos \theta \vec{I} + \sin \theta \vec{K}$$

$$\vec{k} = (\vec{k} \cdot \vec{I})\vec{I} + (\vec{k} \cdot \vec{K})\vec{K} = \cos(90 + \theta)\vec{I} + \cos \theta \vec{K} = -\sin \theta \vec{I} + \cos \theta \vec{K}$$

Logo, a equação do teorema do momento dos impulsos, assume a forma:

$$J_{Gy}(\omega' - \omega) = [x_G(\cos \theta \vec{I} + \sin \theta \vec{K}) + z_G(-\sin \theta \vec{I} + \cos \theta \vec{K})] \wedge I\vec{K} = (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) \cdot I$$

$$\Rightarrow \omega' - \omega = \frac{I}{J_{Gy}}(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) \Rightarrow \omega' = \omega + \frac{I}{J_{Gy}}(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta), \quad (9)$$

▪ *Velocidade do ponto P do trem de pouso*

$$\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge (P - G), \quad (10)$$

▪ *Velocidade relativa do ponto P de contacto do trem de pouso imediatamente antes choque*

$$u = u_1 + u_2 = \vec{v}_{P\text{planador}} \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_{P\text{solo}} \cdot \vec{n}_2 = \vec{v}_P \cdot \vec{K} + \vec{0} \cdot (-\vec{K}) = \vec{v}_P \cdot \vec{K},$$

$$\Rightarrow u = \vec{v}_G \cdot \vec{K} = v_G \quad (11)$$

pois a velocidade angular do planador é nula antes do pouso, conforme o enunciado do problema.

▪ *Varição da velocidade relativa do ponto de contacto do trem de pouso devida ao choque*

$$\Delta u = \Delta \vec{v}_P \cdot \vec{K} = [\Delta \vec{v}_G + \Delta \vec{\omega} \wedge (P - G)] \cdot \vec{K}, \quad (12)$$

Substituindo-se (7) e (9) em (12), resulta:

$$\Delta u = \left\{ \frac{I}{m} \vec{K} + \frac{I}{J_{Gy}}(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) \vec{J} \wedge [x_G(\cos \theta \vec{I} + \sin \theta \vec{K}) + z_G(-\sin \theta \vec{I} + \cos \theta \vec{K})] \right\} \cdot \vec{K}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{I}{m} + \frac{I}{J_{Gy}} [x_G^2 \cos^2 \theta \vec{K} - x_G^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \vec{I} - x_G z_G \cos \theta \cdot \sin \theta \vec{K} - x_G z_G \cos^2 \theta \vec{I}] \cdot \vec{K} +$$

$$+ \frac{I}{J_{Gy}} [-x_G z_G \cos \theta \cdot \sin \theta \vec{K} + x_G z_G \sin^2 \theta \vec{I} + z_G^2 \sin^2 \theta \vec{K} + z_G^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \vec{I}] \cdot \vec{K}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{I}{m} + \frac{I}{J_{Gy}} [x_G^2 \cos^2 \theta - 2x_G z_G \cos \theta \cdot \sin \theta + z_G^2 \sin^2 \theta]$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{I}{m} + \frac{I}{J_{Gy}} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)^2 \quad (13)$$

▪ *Equação empírica da teoria de choque e percussões*

Associando-se a equação empírica

$$u' = -e \cdot u \Rightarrow \Delta u = u' - u = -(1 + e)u \quad (14)$$

onde u é dada pela equação (11), à equação (13), resulta:



$$\frac{I}{m} + \frac{I}{J_{Gy}} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)^2 = -(1+e)v_{Gz}$$

$$\Rightarrow I = -mJ_{Gy} \frac{(1+e)v_{Gz}}{J_{Gy} + m(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)^2} \quad (15),$$

3. Condições cinemáticas imediatamente após o choque

- V_{Gx}

$$v'_{Gx} = v_{Gx} \quad (16)$$

- V_{Gz}

$$v'_{Gz} = v_{Gz} + \frac{I}{m} = v_{Gz} - J_{Gy} \frac{(1+e)v_{Gz}}{J_{Gy} + m(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)^2} \quad (17)$$

- *Velocidade angular*

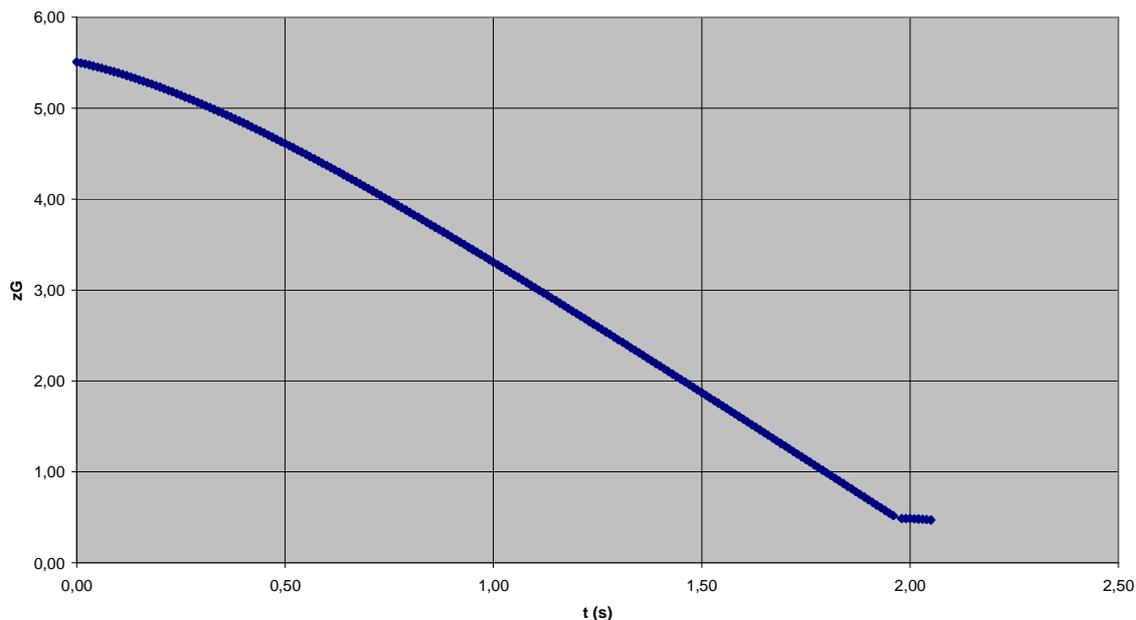
$$\omega' = \omega + \frac{I}{J_{Gy}} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) = 0 + \frac{I}{J_{Gy}} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) = \frac{I}{J_{Gy}} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \omega' = -\frac{m(1+e)v_{Gz}}{J_{Gy} + m(-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta)^2} (-x_G \cos \theta + z_G \sin \theta) \quad (18)$$

(Modelagem: 2,0 pontos)

4. Gráfico de z_G em função do tempo

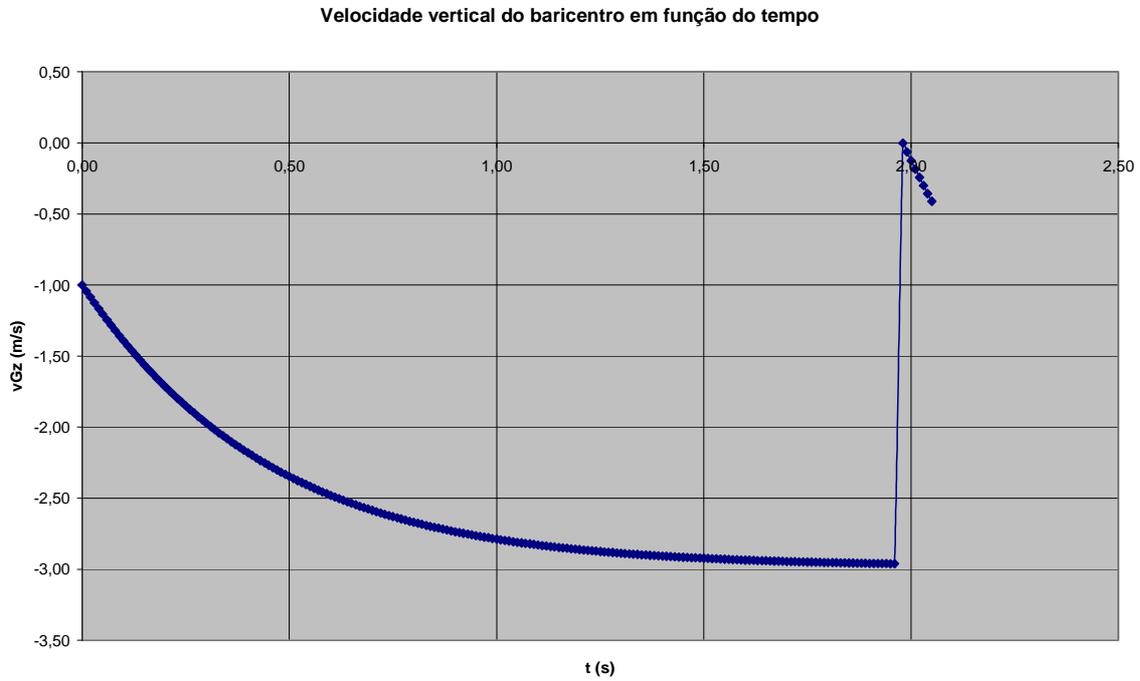
Posição vertical do baricentro em função do tempo



(0,4 pontos)

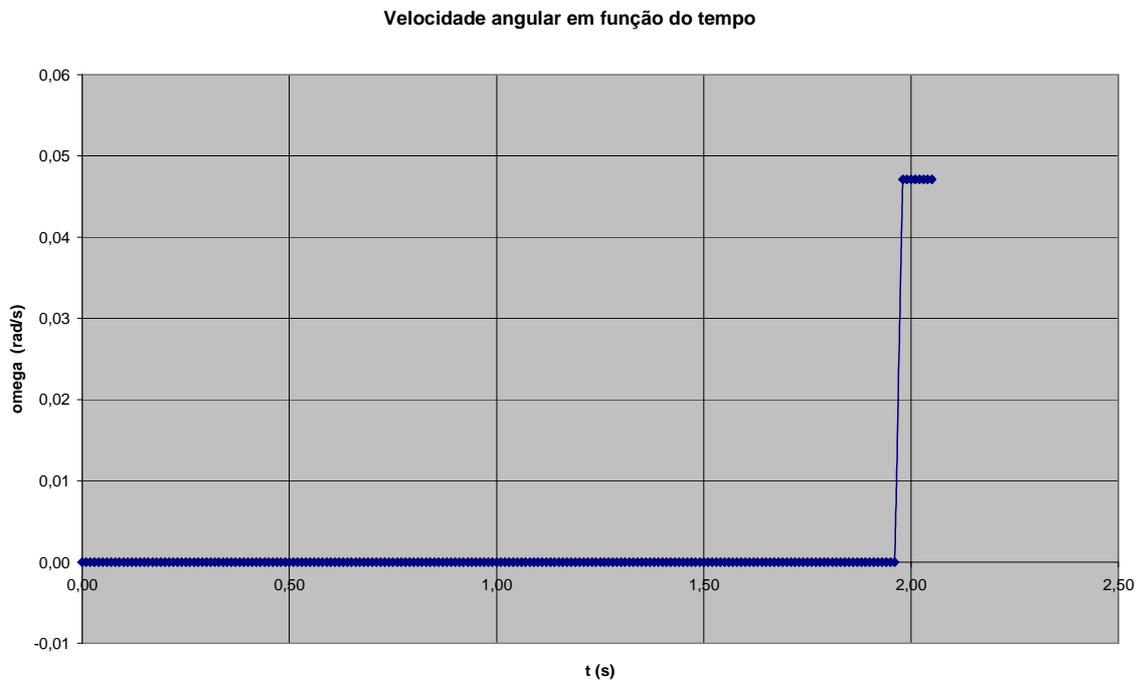


5. Gráfico de V_{Gz} em função do tempo



(0,4 pontos)

6. Gráfico da velocidade angular em função do tempo



(0,2 pontos)



QUESTÃO 4. Resolução

(a) Vínculos holônomos são representados por equações algébricas ou, o que é equivalente, por equações diferenciais exatas. Vínculos não holônomos, por sua vez, são descritos por equações diferenciais não exatas. Como exemplo de vínculo holônimo, pode-se citar o vínculo de corpo rígido, ou seja:

$$|\vec{P}_i - \vec{P}_j| = L \Rightarrow (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = L^2,$$

onde \vec{P}_i e \vec{P}_j são dois pontos quaisquer de um corpo rígido.

Exemplo clássico de vínculos não holônomos são as equações cinemáticas do movimento de rolamento sem escorregamento de uma esfera sobre um plano. Utilizando-se os ângulos de Euler φ, θ, ψ , tal movimento é restrito pelas equações

$$\dot{x}_G - r(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) = 0$$

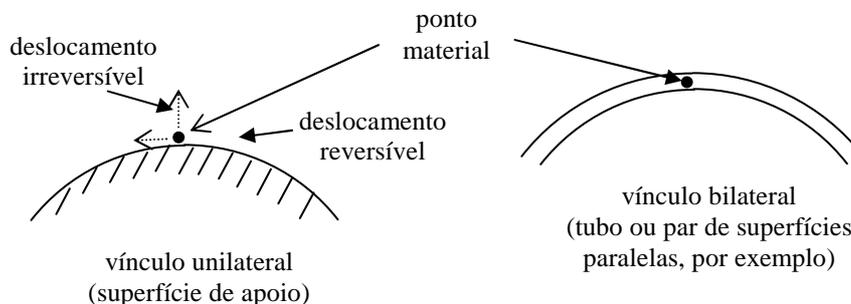
$$\dot{y}_G + r(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi) = 0$$

$$z = r$$

das quais as duas primeiras são equações diferenciais não exatas (vínculos não-holônomos) e a terceira é uma equação algébrica (vínculo holônimo).

(0,4 pontos)

(b) Os vínculos bilaterais impedem o deslocamento de um ponto do corpo em dois sentidos enquanto que os vínculos unilaterais o fazem em um sentido único (vide figura).



Calculando-se os trabalhos virtuais das forças reativas devidas a esses dois tipos de vínculo observa-se que: 1) se o vínculo é bilateral e não existe atrito, o trabalho virtual da força reativa é nulo para quaisquer deslocamentos virtuais compatíveis com o vínculo; 2) se o vínculo é unilateral e não existe atrito, o trabalho virtual da força reativa é nulo para os deslocamentos reversíveis (compatíveis com o vínculo nos dois sentidos) e positivo para os vínculos irreversíveis (compatíveis com o vínculo em um único sentido).

Como exemplos de vínculos bilateral e unilateral podem-se citar, respectivamente: guia linear e cabo inextensível.

(0,3 pontos)

(c) Para obter o valor de uma determinada reação vincular mediante a aplicação do PTV, é suficiente eliminar o vínculo em questão, substituindo-o pela respectiva reação (incógnita). Isso feito, aplica-se o PTV ao equilíbrio do sistema considerando-se o conjunto de forças dado acrescido da força reativa incógnita.

(0,3 pontos)