

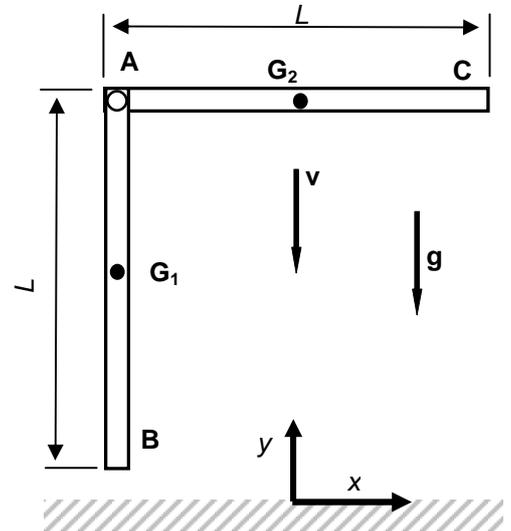


Mecânica – B – PME 2200 – 2ª. Prova – 17/5/2011

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos)

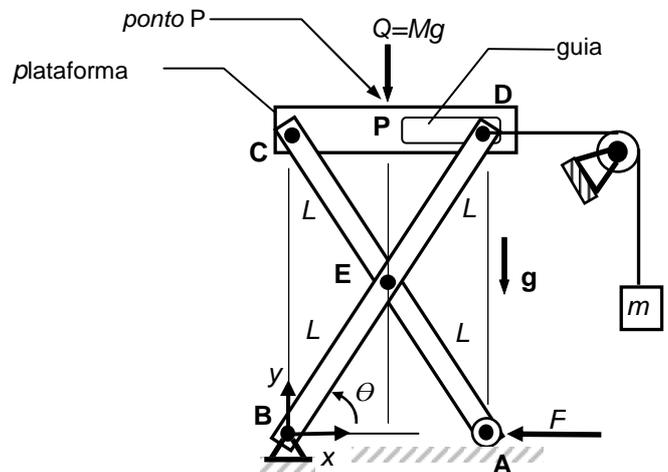
Considere o sistema mostrado na figura ao lado, composto pelas barras retas e homogêneas, AB e AC, de comprimento L e de massas m e $2m$, respectivamente. As barras são unidas por uma articulação ideal em A. A figura mostra a configuração do sistema no instante imediatamente antes da colisão da barra AB com o solo. Nesse instante, o conjunto exibe um ato de movimento de translação retilínea, com velocidade vertical de módulo v e o ângulo formado entre as barras vale $\pi/2$ radianos. Sabendo-se que o coeficiente de restituição entre a barra AB e o solo vale e , pedem-se:



- o diagrama de corpo livre de forças impulsivas de cada barra, no instante do choque;
- as velocidades \vec{v}'_{G1} e \vec{v}'_{G2} dos baricentros de cada barra no instante imediatamente após o choque;
- os vetores rotação $\vec{\omega}'_1$ e $\vec{\omega}'_2$ de cada barra no instante imediatamente após o choque.

2ª Questão (3,5 pontos)

O sistema de elevação ao lado é formado por uma plataforma e pelas barras AC e BD, contínuas, homogêneas idênticas, de comprimento $2L$. Tanto a plataforma como as barras têm massa desprezível relativamente à massa M da carga Q e à massa m do contrapeso S. Todas as articulações são ideais. A carga $Q=Mg$ é aplicada em P. Um fio ideal liga o contrapeso ao ponto D da barra, através de uma polia ideal. Os deslocamentos horizontais de A (sobre o solo) e D (no interior da guia) ocorrem sem atrito. Na configuração apresentada, pede-se, tomando como referência o sistema Bxy:



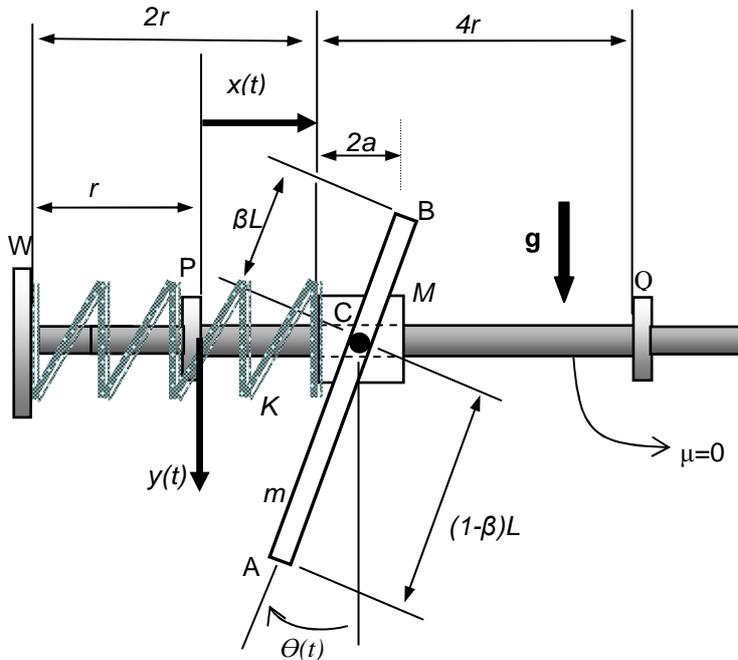
- escrever as coordenadas x_A , y_P e x_D , em função da coordenada angular θ ;
- os deslocamentos virtuais δx_A , δy_P , δx_D em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- o trabalho virtual das forças externas aplicadas ao sistema, em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), determinar o módulo da força F aplicada em A que mantém o sistema em equilíbrio na configuração apresentada.

3ª. Questão (4,0 pontos) – esta questão é baseada no EMSC#2, cujo diagrama simplificado é reproduzido abaixo. Para sua resolução, considere a seguinte tabela de parâmetros de simulação:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Conjunto	K [N/m]	e	β	$x(0)$ [m]	$\dot{x}(0)$ [m/s]	$\theta(0)$ [rad]	$\dot{\theta}(0)$ [rad/s]
1	0	1,0	0	$2*r+a$	0	$\pi/64$	0
2	100	0,5	0,50	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0
3	100	0,5	0,25	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0
4	100	1,0	0,25	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0



a) Considere um possível impacto com o batente do lado direito (Q). Para uma inclinação genérica θ , em que são conhecidas as velocidades \dot{x}_C e $\dot{\theta}$ no instante imediatamente anterior ao choque, determine \dot{x}_C e $\dot{\theta}$ no instante imediatamente posterior. Aplique os Teoremas da Resultante dos Impulsos e dos Momentos dos Impulsos. Expresse os resultados em função dos parâmetros pertinentes (massa, inércia, geométricos) e do coeficiente de restituição e ;

b) nas condições de simulação 1, obteve-se a representação mostrada na figura 1 para os

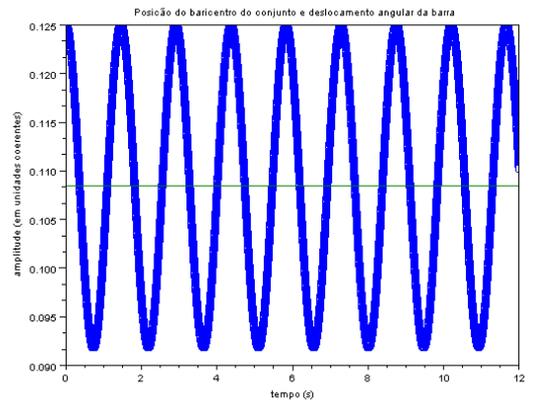
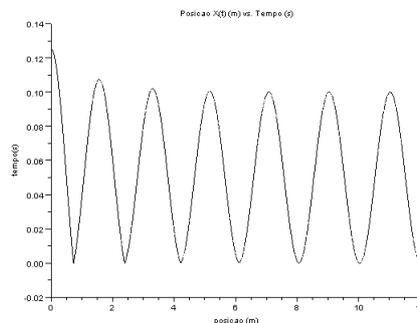
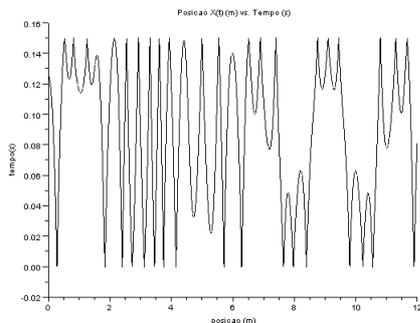


Figura 1

deslocamentos da componente x do baricentro do conjunto (linha fina) e para o ângulo θ (linha espessa). Explique o porquê deste comportamento. Responda com clareza e concisão.

c) dentre os conjuntos de parâmetros 2, 3 e 4 da tabela, em qual deles o bloco deve apresentar: (i) o maior e (ii) o menor número de choques contra os batentes? **Justifique** sua resposta com clareza e concisão.





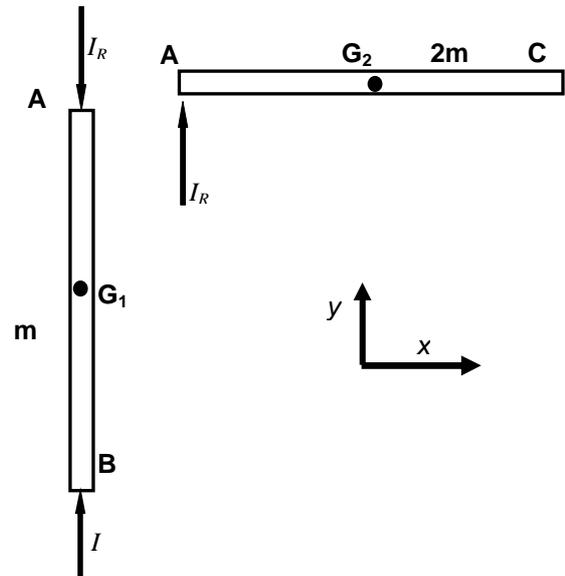
Resolução, Questão 1

(a) Diagrama de corpo-livre das barras 1 e 2 **(0,5 pontos)**

A justificativa para os diagramas desenhados na figura abaixo baseia-se na seguinte argumentação:

- Para um choque sem atrito, o impulso aplicado à barra AB no contacto com o solo é necessariamente vertical.
- Aplicando-se o Teorema da Resultante dos Impulsos ao sistema material composto pelas duas barras, AB e AC , concluímos que a direção da velocidade do baricentro G desse sistema imediatamente após o choque é vertical, necessariamente.
- Para que, no evento do choque, G se desloque apenas na vertical, é suficiente que tanto G_1 quanto G_2 tenham apenas deslocamentos verticais.
- A Teoria de Choque e Percussões tem como hipótese fundamental a de que “o efeito total das percussões ativas e reativas é tal que os pontos do sistema material sofrem variações bruscas de sua velocidade, mas suas posições não se alteram de modo sensível”.
- Da hipótese acima concluímos que, no ato do choque, é necessário que o ângulo de 90° entre as barras se preserve.
- Como a posição de G deve se manter constante na direção horizontal e as barras estão ligadas entre si por uma articulação ideal, no evento do choque os atos instantâneos de movimento dessas barras compatíveis com as restrições impostas, são: translação para a barra AB e rotação em torno de A ($C.I.R.$) para a barra AC .
- Portanto, as forças impulsivas compatíveis com os atos instantâneos de movimento das barras AB e AC , são: o impulso vertical I proveniente do choque da barra AB com o solo e o impulso reativo vertical I_R na articulação A .

Observação: A solução alternativa à proposta consiste em se admitir a existência de uma componente impulsiva reativa horizontal na articulação A . Após o devido equacionamento (e maior trabalho algébrico) chega-se à conclusão de que essa componente é nula.



(b e c):

Barra 1:

$$m(\vec{v}'_{G1} - \vec{v}_{G1}) = (\vec{I} - \vec{I}_R) \Rightarrow m(v'_{G1x}\vec{i} + v'_{G1y}\vec{j} - (-v\vec{j})) = I\vec{j} - I_R\vec{j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} mv'_{G1x} = 0 \Rightarrow v'_{G1x} = 0 \\ mv'_{G1y} + mv = I - I_R \Rightarrow v'_{G1y} = \frac{I - I_R}{m} - v \end{array} \right. \quad (1)$$

$$J_{Gz}(\omega'_1 - \omega_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega'_1 = \omega_1 = 0}$$

(1 ponto)



Barra 2

$$2m(\vec{v}'_{G2} - \vec{v}_{G2}) = \vec{I}_R \Rightarrow 2m(v'_{G2x}\vec{i} + v'_{G2y}\vec{j} - (-v\vec{j})) = I_R\vec{j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2mv'_{G2x} = 0 \Rightarrow v'_{G2x} = 0 \\ mv'_{G2y} + 2mv = I_R \Rightarrow v'_{G2y} = \frac{I_R}{2m} - v \end{array} \right. \quad (2)$$

$$J_{Gz}(\omega'_2 - \omega_2) = -\frac{L}{2}I_R \Rightarrow J_{Gz}\omega'_2 = -\frac{L}{2}I_R \Rightarrow \frac{2mL^2}{12}\omega'_2 = -\frac{L}{2}I_R \Rightarrow \frac{mL}{6}\omega'_2 = -\frac{I_R}{2} \Rightarrow I_R = -\frac{mL}{3}\omega'_2 \quad (3)$$

(1 ponto)
(0,5 pontos)

Hipótese de Newton e equações da cinemática:

$$\vec{v}'_B \cdot \vec{j} = -e\vec{v}_B \cdot \vec{j} \Rightarrow v'_B = ev$$

$$\vec{v}'_{G1} = \vec{v}'_B + \vec{\omega}'_1 \wedge (G_1 - B) = ev\vec{j} + \vec{0} \wedge (G_1 - B) = ev\vec{j} \Rightarrow v'_{G1y} = ev \quad (4)$$

$$\vec{v}'_{G2} = \vec{v}'_A + \vec{\omega}'_2 \wedge (G_2 - A) = ev\vec{j} + \omega'_2\vec{k} \wedge \left(\frac{L}{2}\vec{i}\right) \Rightarrow v'_{G2y} = ev + \frac{\omega'_2 L}{2} \quad (5)$$

$$= (\vec{I} - \vec{I}_R) \Rightarrow m(v'_{G1x}\vec{i} + v'_{G1y}\vec{j} - (-v\vec{j})) = I$$

(1) e (4)

$$ev = \frac{I - I_R}{m} - v \Rightarrow I_R = I - mv(1 + e) \quad (6)$$

(2) e (5)

$$ev + \frac{\omega'_2 L}{2} = \frac{I_R}{2m} - v \Rightarrow I_R = 2mv(1 + e) + m\omega'_2 L \quad (7)$$

(3) e (7)

$$-\frac{mL}{3}\omega'_2 = 2mv(1 + e) + m\omega'_2 L \Rightarrow \omega'_2 = -\frac{3v(1 + e)}{2L} \quad (8)$$

(5) e (8)

$$v'_{G2y} = ev + \frac{L}{2} \left[-\frac{3v(1 + e)}{2L} \right] \Rightarrow v'_{G2y} = \frac{e - 3}{4}v \quad (9)$$

(0,5 pontos): exatidão dos resultados



Resolução, Questão 2:

(a):

$$\boxed{x_A = 2L \cos \theta} \quad \boxed{y_P = 2L \sin \theta} \quad \boxed{x_D = 2L \cos \theta} \quad (1 \text{ ponto})$$

(b):

$$\boxed{\delta x_A = -2L \sin \theta \delta \theta} \quad \boxed{\delta y_P = 2L \cos \theta \delta \theta} \quad \boxed{\delta x_D = -2L \sin \theta \delta \theta} \quad (1 \text{ ponto})$$

(c):

$$\delta W = (-F)(-2L \sin \theta \delta \theta) + (-Mg)(2L \cos \theta \delta \theta) + (mg)(-2L \sin \theta \delta \theta) \quad (1 \text{ ponto})$$

$$\boxed{\delta W = 2L(F \sin \theta - Mg \cos \theta - mg \sin \theta) \delta \theta}$$

(d):

$$\text{PTV: } \delta W = 0$$

$$\delta W = 2L(F \sin \theta - Mg \cos \theta - mg \sin \theta) \delta \theta = 0$$

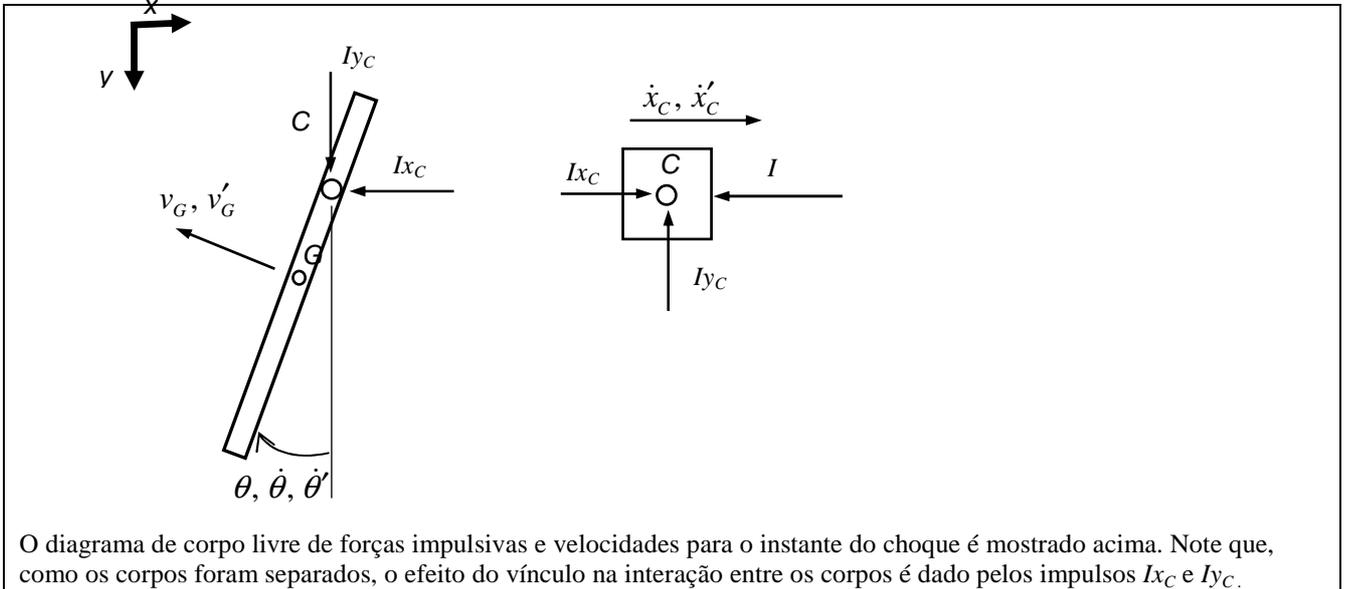
$$F \sin \theta - Mg \cos \theta - mg \sin \theta = 0$$

$$\boxed{F = Mg \cot \theta + mg} \quad (0,5 \text{ pontos})$$



Resolução, Questão 3

item (a) (2,0 pontos)



Aplicando-se o TRI ao bloco e o TMI à barra temos:

bloco (TRI):

$$M(\dot{x}_C \vec{i} - \dot{x}_C \vec{i}) = (-I + I_{x_c}) \vec{i} - I_{y_c} \vec{j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}'_C = \frac{1}{M}(-I + I_{x_c} + M\dot{x}_C) \\ I_{y_c} = 0 \end{array} \right\}.$$

Como era esperado, a componente vertical do impulso reativo em C é nula, uma vez que não há qualquer impulso externo agindo nessa direção em qualquer dos corpos. Temos ainda, da hipótese de Newton para o choque central entre dois corpos (o bloco, que se move horizontalmente e o batente, que permanece sempre em repouso),

$$(\dot{x}'_C \vec{i}) \cdot \vec{i} = -e(\dot{x}_C \vec{i}) \cdot \vec{i} \Rightarrow \dot{x}'_C = -e\dot{x}_C \quad (1)$$

barra (TMI – pólo C):

o momento angular da barra em relação ao pólo C, no instante imediatamente anterior ao choque, é

$$\vec{H}_C = m(\vec{G} - \vec{C}) \wedge \dot{x}_C \vec{i} + J_{C_z}(\dot{\theta} \vec{k})$$

Como

$$(\vec{G} - \vec{C}) = L \left(\beta - \frac{1}{2} \right) (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = d(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

e

$$J_{C_z} = J_{G_z} + md^2$$

então

$$\vec{H}_C = md(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \wedge \dot{x}_C \vec{i} + J_{C_z}(\dot{\theta} \vec{k})$$

E, portanto,

$$\vec{H}_C = -md \cos \theta \dot{x}_C \vec{k} + (J_{G_z} + md^2) \dot{\theta} \vec{k} \quad (2)$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Analogamente, para o instante imediatamente posterior ao choque,

$$\vec{H}'_C = -md \cos \theta \dot{x}'_C \vec{k} + (J_{G_z} + md^2) \dot{\theta}' \vec{k} \quad (3)$$

Aplicando-se o TMI obtém-se:

$$\vec{H}'_C - \vec{H}_C = -md \cos \theta \dot{x}'_C \vec{k} + md \cos \theta \dot{x}_C \vec{k} + (J_{G_z} + md^2) (\dot{\theta}' - \dot{\theta}) \vec{k} = (C - C) \wedge (\vec{I}_{x_C}) = \vec{0}, \quad (4)$$

pois o pólo escolhido coincide com o de aplicação do impulso. Assim, substituindo-se (1) em (4) e resolvendo-se para $\dot{\theta}'$, tem-se

$$-md \cos \theta (-e \dot{x}_C) + md \cos \theta \dot{x}_C + (J_{G_z} + md^2) (\dot{\theta}' - \dot{\theta}) = \vec{0}$$

Assim,

$$\dot{\theta}' = -\frac{1}{(J_{G_z} + md^2)} [md \cos \theta (1+e) \dot{x}_C - (J_{G_z} + md^2) \dot{\theta}] \quad (1,0 \text{ ponto})$$

$$\dot{x}'_C = -e \dot{x}_C \quad (1,0 \text{ ponto})$$

Item (b) (1,0 ponto)

Em primeiro lugar, lembra-se que a componente x_{G_s} da coordena do baricentro do sistema é dada por

$$x_{G_s} = \left(\frac{Mx_C + m(x_C - d \sin \theta)}{M + m} \right) . \text{ Vejamos o que significa cada parâmetro, no conjunto 1 da tabela:}$$

$K \text{ [N/m]}=0$	Ausência de forças externas não-impulsivas na direção horizontal (sobre o sistema bloco-barra)
$e = 1$	Caso haja colisão, esta será perfeitamente elástica (sem dissipação de energia)
$B=0$	A barra está ancorada em uma de suas extremidades
$x(0) = 2 * r + a \text{ [m]}$	Posição inicial do bloco no local equivalente à distensão nula da mola
$\dot{x}(0) = 0 \text{ [m/s]}$	Velocidade inicial do bloco nula
$\theta(0) = \pi / 64 \text{ [rad]}$	Posição angular inicial da barra
$\dot{\theta}(0) = 0 \text{ [rad/s]}$	Velocidade angular inicial da barra

Nessas condições, a Figura 1 mostra que o baricentro não se movimenta, enquanto a posição angular da barra executa movimento oscilatório. Analisa-se este comportamento:

- (i) a ausência da mola ($K=0$) implica a não existência de quaisquer forças não-impulsivas agindo sobre o sistema, uma vez que os vínculos são considerados ideais. Assim, pelo TMB, a aceleração do baricentro seria nula e, para as condições iniciais dadas, justificaria a posição constante apresentada no gráfico;
- (ii) a condição acima não seria suficiente para que o baricentro do sistema não se movimentasse caso houvesse algum tipo de impulso externo aplicado pois, pelo TRI, deveria haver, na presença de tal impulso, variação na quantidade de movimento do baricentro;
- (iii) assim, posteriormente à aplicação deste impulso (que, no caso, seria oriundo da colisão do bloco com os batentes), a variação na velocidade do baricentro atuaria como uma nova condição inicial de velocidade que, por sua vez, afetaria, a partir do próximo passo de integração, a posição do baricentro do sistema;
- (iv) conclui-se, portanto, que não há choque entre o bloco e os batentes;



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

(v) o sistema possui quantidade de movimento constante. Entretanto a barra, que é liberada de uma posição angular diferente de zero, terá sua quantidade de movimento alterada no tempo, o que implica que o bloco também terá sua quantidade de movimento variável no tempo, para que a quantidade de movimento total do sistema seja constante.

(vi) pode-se, ainda, entender a asserção em (v) como: na ausência de forças e impulsos externos ao sistema, a quantidade de movimento do sistema é invariante. No entanto, a interação vincular em C, entre o bloco e a barra, é uma força de contato que tem componentes horizontal e vertical; portanto, a aplicação do TMB à barra permite concluir que seu baricentro está sujeito à força peso e às componentes horizontal e vertical de reação no contato com o bloco, em C, que dá origem a uma equação diferencial do tipo

$$m\vec{a}_G \cdot \vec{i} = (mg\vec{j} + F_{cx}\vec{i} + F_{cy}\vec{j}) \cdot \vec{i} \Rightarrow m\ddot{x}_G = F_{cx}$$

Como $\ddot{x}_G = f(\theta, \dot{\theta}, t)$, a componente da força de contato também é função dos mesmos parâmetros, justificando assim uma excitação que é função do ângulo θ , portanto oscilatória (movimento pendular).

Item (c) (1,0 ponto)

Conjunto	K [N/m]	e	β	$x(0)$ [m]	$\dot{x}(0)$ [m/s]	$\theta(0)$ [rad]	$\dot{\theta}(0)$ [rad/s]
2	100	0,5	0,50	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0
3	100	0,5	0,25	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0
4	100	1,0	0,25	$2*r+a$	0	$\pi/3$	0

As condições iniciais são idênticas nas três situações de simulação. Em todas elas o sistema parte do repouso, a mola de configuração deformada e o pêndulo de um ângulo de 60° com a vertical. As situações diferem umas das outras nos valores atribuídos a dois dos parâmetros: o coeficiente de restituição e o momento de inércia do Pêndulo, com respeito à articulação.

Na situação 4 o coeficiente de restituição é 1,0: *o choque é perfeitamente elástico*. Ou seja, o sistema é conservativo, pois nenhuma outra forma de dissipação existe. Como pode ser observado na simulação do gráfico da figura da esquerda, a oscilação se faz com inúmeros impactos ora contra o batente da esquerda, ora contra o da direita, de forma não periódica (caótica). No entanto, não há qualquer evidência de perda de energia mecânica do sistema.

A situação 4 corresponde, portanto, à simulação que apresenta o maior número de impactos.

(0,5 pontos)

No gráfico da figura da direita, aquele de menor número de impactos para as condições iniciais consideradas, são observados apenas três eventos de choque, com subsequente perda de energia mecânica. Após o terceiro impacto a energia mecânica do sistema é conservada, como pode ser verificado através do movimento periódico que é estabelecido *a posteriori*. As situações 2 e 3 caracterizam-se pelo mesmo coeficiente de restituição ($e=0,5$), compatível com a perda de energia observada. No entanto, à configuração 3 corresponde maior energia mecânica inicial, porquanto a ela está associada energia potencial inicial. Note que na configuração 2 o baricentro da barra coincide com a articulação, e não existe variação de energia potencial da barra. Nesta configuração, o sistema se reduz a um oscilador de um grau de liberdade, com restrições de posição.

Como é sabido que a figura da direita corresponde à situação de menor número de impactos, a ela estará associada a situação 2, aquela de menor energia mecânica inicial.

(0,5 pontos)