



PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 18 de maio de 2010
 Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (1,0 ponto)

Na palestra do dia 06 de maio de 2010 foi apresentada a ‘Equação de Meshchersky’, por ele deduzida em 1897, e que trata consistentemente da segunda Lei de Newton quando aplicada ao estudo do movimento de uma partícula isolada que ganha ou perde massa de forma contínua. Tal equação é escrita:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}_{rel}, \quad \text{com } \vec{\Phi} = \dot{m} \vec{u}_{rel}, \quad \vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{v},$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula medida em relação a um referencial inercial e \vec{u} é a velocidade da parcela de massa que é perdida, medida em relação ao mesmo referencial (*). O cientista russo Tsiolkovski aplicou a equação de Meschersky a duas versões do problema do foguete. Tais versões são conhecidas como primeiro e segundo problemas de Tsiolkovski.

Limitando sua resposta a dez linhas, responda:

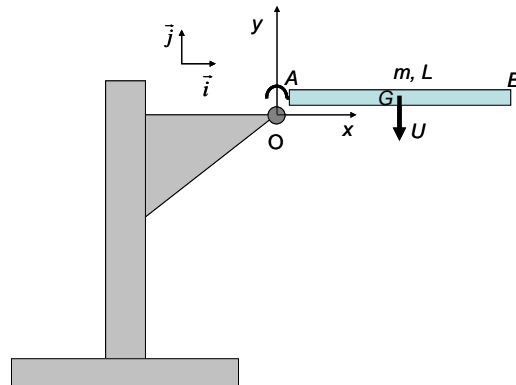
- (a) Qual a diferença entre os dois problemas de Tsiolkovski?
- (b) Descreva dois *outros* problemas de sistemas de massa variável, tratados durante a palestra.

(*). Esta equação é invariante com respeito a transformações Galileanas, ou seja *satisfaz o princípio de relatividade de Galileo*. Note que a equação $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ *não satisfaz este princípio* e, portanto, não é genericamente válida.

2ª Questão (3,5 pontos)

A barra de massa m e comprimento L cai sem rotação. No momento do contato, quando a velocidade de translação da barra é $\vec{v}_G = -U\vec{j}$, o gancho instalado na extremidade esquerda da barra prende-se ao pino que está ligado à estrutura rígida do suporte. Pede-se:

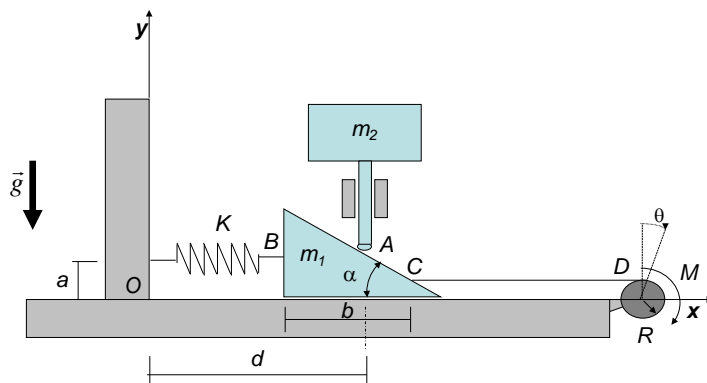
- (a) O vetor de rotação $\vec{\omega}'$ da barra imediatamente após o choque. Desconsidere o diâmetro do pino e a espessura da barra.
- (b) O impulso reativo \vec{I} , aplicado pelo pino no gancho;
- (c) A perda de energia cinética ΔT provocada pelo choque.



3ª Questão (3,5 pontos)

A cunha triangular de massa m_1 pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal. Sobre ela, em A, apóia-se uma peça de massa m_2 , formada por um bloco e uma haste, a qual pode deslizar sem atrito ao longo de uma guia vertical. À esquerda, em B, a cunha é ligada a uma parede vertical através de uma mola linear ideal de constante K . À direita, em C, a cunha está ligada a um carretel, de raio R , através de um fio inextensível que nele se enrola. Ao carretel é aplicado um binário de momento M . O comprimento natural da mola é L . Pede-se:

- (a) Relacione os deslocamentos virtuais dos pontos A, B e C ao deslocamento virtual angular do carretel, $\delta\theta$.
- (b) Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), determine a posição angular de equilíbrio do carretel, θ_{eq} . Considere que $\theta = 0$ quando a mola está em seu comprimento natural.

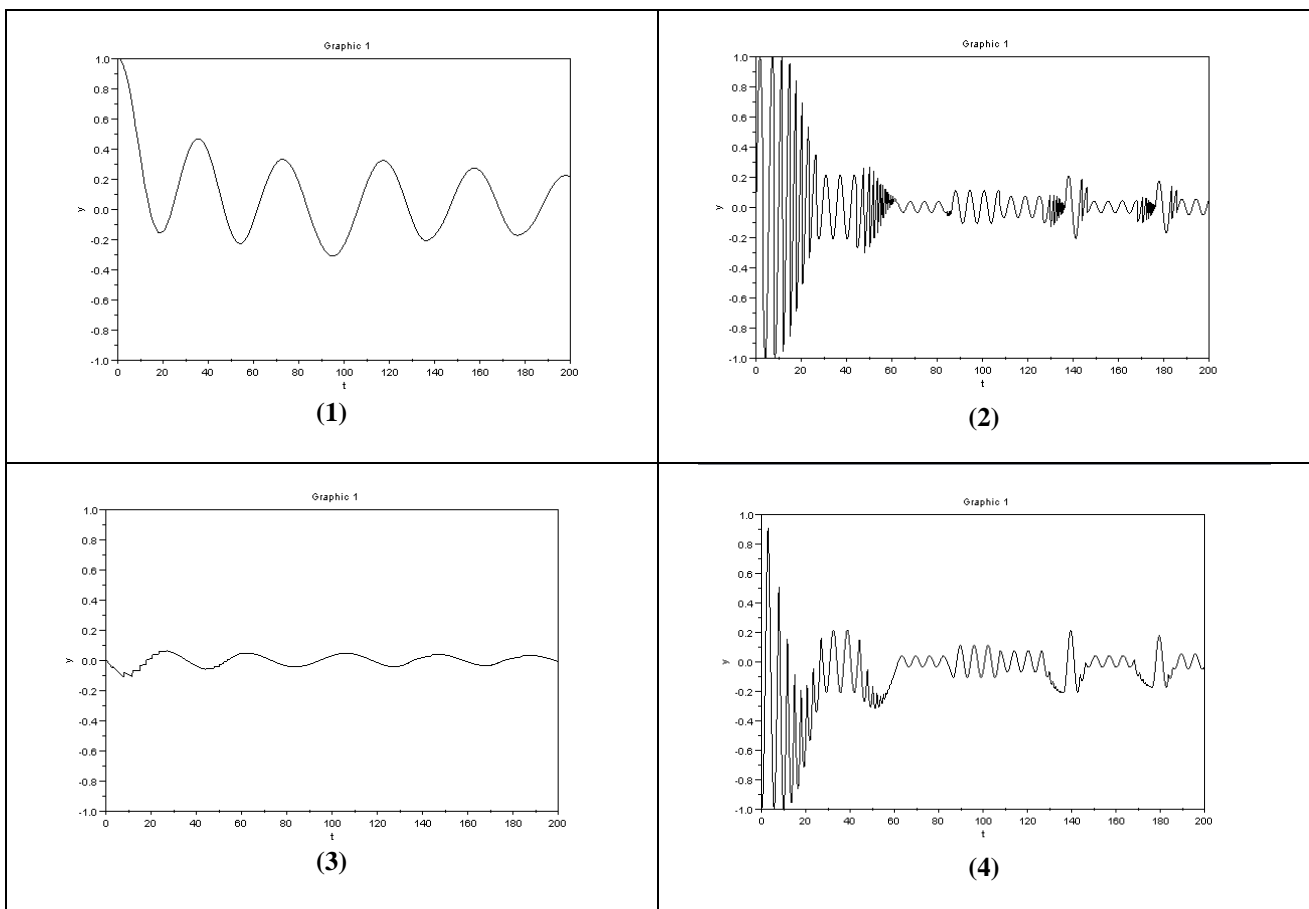




4ª Questão (3,0 pontos) - Baseada no EMSC#2

Os gráficos abaixo apresentam séries temporais de simulação correspondentes a um dos cinco casos estudados (a, b, c, d, e). Pede-se:

- (a) Quais parâmetros e condições iniciais foram estabelecidos como fixos no enunciado do EMSC#2? Apresente os valores numéricos destes parâmetros e destas condições iniciais.
- (b) Identifique o caso (a, b, c, d, e) que corresponde aos gráficos abaixo e apresente os valores dos parâmetros deste caso específico de simulação.
- (c) Monte uma tabela como a ilustrada abaixo, classificando os gráficos de (1) a (4) segundo o tipo da variável apresentada (se de posição ou de velocidade) e segundo sua identidade (se bloco 1 ou bloco 2).
- (d) Descreva, interpretando e justificando conceitualmente, os fenômenos físicos ocorrentes neste caso específico de simulação. Faça alusão às respostas dadas para os itens anteriores.



Classificação

Gráfico	Tipo (posição: <i>p</i> ; velocidade: <i>v</i>)	Identidade (bloco: 1 ou 2)
1		
2		
3		
4		



PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 18 de maio de 2010
RESOLUÇÃO

1ª Questão (1,0 ponto)

(a) O *primeiro* problema de Tsiolkovski trata do equacionamento da dinâmica do foguete na *ausência de gravidade*. O *segundo* problema considera a ação da *gravidade*. (0,5)

(b) Exemplos de *outros* problemas tratados na palestra, à luz da mecânica dos sistemas de massa variável:

- (i) Dinâmica da corrente em três versões: (1) que cai sobre uma mesa (Buquoy); (2) que se desenrola suspensa a partir de uma mesa (Cayley); (3) corrente em U, que cai, suspensa por uma das extremidades.
- (ii) Colapso vertical de edifícios (torres do WTC);
- (iii) Lançamento de cabo submarino através de carretel;
- (iv) Dinâmica de coluna d'água oscilante em tubo vertical, aberto e parcialmente imerso;
- (v) Problema de impacto hidrodinâmico.

(0,5) (para qualquer par de problemas acima)

**2ª Questão (3,5 pontos)**

(a)

Como o único impulso externo é aplicado à barra em O, o momento angular em relação a este pólo se conserva. Assim, $\vec{K}'_O = \vec{K}_O$. (0,5)

Então,

$$\vec{K}_O = (G - O) \times m\vec{v}_G = \frac{L}{2}\vec{i} \times (-mU\vec{j}) = -\frac{1}{2}mLU\vec{k} \quad (0,5)$$

e, escrevendo $J = J_{Oz} = \frac{mL^2}{3}$, o momento de inércia da barra em relação ao pólo O, logo após o enganchamento, tem-se:

$$\vec{K}'_O = J_{Oz}\vec{\omega}' = J_{Oz}\omega'\vec{k} = \frac{1}{3}mL^2\omega'\vec{k}. \quad (0,5)$$

Que fornece: $\vec{\omega}' = -\frac{3U}{2L}\vec{k}$. (0,5)

(b)

A velocidade do centro de massa da barra logo após o impacto fica,

$$\vec{v}'_G = \vec{\omega}' \times (G - O) = -\frac{3U}{2L}\vec{k} \times \frac{L}{2}\vec{i} = -\frac{3}{4}U\vec{j}. \quad (0,5)$$

O Teorema da Resultante dos Impulsos fornece, então:

$$\vec{I} = m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = m\left(-\frac{3}{4}U\vec{j} - (-U\vec{j})\right), \text{ ou seja, } \vec{I} = \frac{1}{4}mU\vec{j}. \quad (0,5)$$

(c) A energia cinética da barra imediatamente antes do choque é dada por:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2 = \frac{1}{2}mU^2.$$

A energia cinética da barra imediatamente após o choque é,

$$T' = \frac{1}{2}mv_G'^2 + \frac{1}{2}J_G\omega'^2 = \frac{1}{2}J_G\omega'^2 = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\left(\frac{3U}{2L}\right)^2 = \frac{3}{8}mU^2.$$

Assim, a variação de energia cinética devido ao choque é negativa (ou seja, perda):

$$\Delta T = T' - T = -\frac{1}{8}mU^2. \quad (0,5)$$

**3ª Questão** (3,5 pontos)

(a)

Fazendo $x_B = L + x$, onde L é o comprimento natural da mola, as posições dos pontos B , C e A são dadas por:

$$(B - O) = x_B \vec{i} + a \vec{j} = (L + x) \vec{i} + a \vec{j}$$

$$(C - O) = x_C \vec{i} + R \vec{j} = (x_B + b) \vec{i} + R \vec{j} = (L + x + b) \vec{i} + R \vec{j}$$

$$(A - O) = d \vec{i} + [y_C + (x_C - d) \tan \alpha] \vec{j} = d \vec{i} + [R + (L + x + b - d) \tan \alpha] \vec{j}$$

(0.5)

Como L , a , b e d são parâmetros constantes, os deslocamentos virtuais de A , B e C serão:

$$\delta A = \tan \alpha \delta x \vec{j}$$

$$\delta B = \delta C = \delta x \vec{i}$$

(0.5)

Devido à inextensibilidade do fio, o deslocamento virtual do ponto D é: $\delta D = \delta B = \delta C = \delta x \vec{i}$. Por outro lado, o deslocamento virtual δx pode ser relacionado ao deslocamento virtual angular do carretel, na forma $\delta x = R \delta \theta$. Desta forma:

$$\delta A = \tan \alpha R \delta \theta \vec{j}$$

$$\delta B = \delta C = R \delta \theta \vec{i}$$

(0.5)

(b) O PTV permite afirmar que a soma dos trabalhos virtuais das forças externas é nulo.

O trabalho virtual da força peso $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ é:

$$\delta W_P = \vec{P}_2 \cdot \delta A = (-m_2 g \vec{j}) \cdot (\tan \alpha \delta x \vec{j}) = -m_2 g \tan \alpha R \delta \theta.$$

O trabalho virtual da força elástica $\vec{F}_E = -K(x_B - L) \vec{i} = -Kx \vec{i} = -KR \theta \vec{i}$ é:

$$\delta W_E = \vec{F}_E \cdot \delta B = (-Kx \vec{i}) \cdot (\delta x \vec{i}) = (-KR \theta \vec{i}) \cdot (R \delta \theta \vec{i}) = -KR^2 \theta \delta \theta$$

(0.5)

E o trabalho virtual do binário aplicado ao carretel é, simplesmente:

$$\delta W_M = M \delta \theta$$

(0.5)

Pelo PTV:

$$\delta W = \delta W_P + \delta W_E + \delta W_M = 0.$$

(0.5)

Desta forma, $[-m_2 g R \tan \alpha - KR^2 \theta + M] \delta \theta = 0$, que fornece, para qualquer $\delta \theta$, a solução de equilíbrio:

$$\theta_{eq} = \frac{M - m_2 g R \tan \alpha}{KR^2} = \frac{M}{KR^2} - \frac{m_2 g}{KR} \tan \alpha$$

(0.5)



4ª Questão (3,0 pontos) - Baseada no EMSC#2

- (a) Quais parâmetros e condições iniciais foram estabelecidos como fixos no enunciado do EMSC#2? Apresente os valores numéricos destes parâmetros e destas condições iniciais:

Os seguintes parâmetros e condições iniciais foram considerados fixos:

$(m_1 = 1\text{kg}; K_1 = 1\text{N/m}; K_2 = 1\text{N/m})$ e $(x_1(0) = -1\text{m}; x_2(0) = 1\text{m}; \dot{x}_1(0) = 0\text{m/s}; \dot{x}_2(0) = 0\text{m/s})$ (0,5)

- (b) Identifique o caso (a, b, c, d, e) correspondente aos gráficos e apresente os valores dos parâmetros deste caso específico:

O caso específico correspondente é o caso (e). (0,5)

São os seguintes parâmetros específicos :

$(m_2 = 50\text{kg}; e = 0,8; L = 0\text{m})$ (0,5)

- (c) Monte uma tabela como a ilustrada abaixo, classificando os gráficos de (1) a (4) segundo o tipo da variável apresentada (se de posição ou de velocidade) e segundo sua identidade (se bloco 1 ou bloco 2):

Classificação		
Gráfico	Tipo (posição: <i>p</i> ; velocidade: <i>v</i>)	Identidade (bloco: 1 ou 2)
1	<i>p</i>	2
2	<i>v</i>	1
3	<i>v</i>	2
4	<i>p</i>	1

(0,5)

- (d) Descreva, interpretando e justificando conceitualmente, os fenômenos físicos ocorrentes neste caso específico de simulação. Faça alusão às respostas dadas para os itens anteriores.

Os resultados em análise correspondem ao caso (e) de simulação.

Os gráficos 2 e 3 (blocos 1 e 2) são de velocidade, que oscila em torno do zero.

Os gráficos 1 e 4 (blocos 2 e 1) são de posição.

Nota-se, claramente, que os períodos típicos de oscilação presentes nos gráficos correspondentes ao bloco 2, posição (Graf. 1) e velocidade (Graf. 3), são cerca de 7 vezes superiores àqueles correspondentes ao bloco 1. De fato, o período natural de um oscilador linear não amortecido é proporcional à raiz quadrada da razão entre massa e rigidez da mola. Como os valores das constantes de rigidez são as mesmas e a razão entre as massas é 50, a razão entre os períodos naturais de oscilação será igual a $\sqrt{50} \approx 7$.

Observando os gráficos 4 e 2, referentes à posição e à velocidade do bloco 1, é nítida a ocorrência de uma sequência de grupos de impactos sucessivos contra o bloco 2. A cada ocorrência de um grupo de impacto, energia cinética é transferida entre os blocos e, simultaneamente, drenada do sistema (lembre que os choques não são perfeitamente elásticos), fazendo com que, assintoticamente, os blocos atinjam o estado de repouso. No entanto, como a massa do bloco 2 é muito superior à do bloco 1, as correspondentes alterações bruscas de velocidade são quase imperceptíveis. Ao contrário, as alterações bruscas de velocidade são bastante nítidas no caso do bloco 1, que passa a oscilar livremente, com amplitudes distintas, após a ocorrência de cada grupo de impactos sucessivos.

Embora seja possível identificar algum padrão de ‘regularidade’ no comportamento dinâmico do sistema, não existe repetitividade. Pode-se dizer que, nesta condição de simulação, o sistema apresenta oscilações características de regimes caóticos.

A simulação ilustra a ação do bloco 1 sobre o bloco 2, amortecendo seu movimento. Tal mecanismo é conhecido como “amortecedor por impacto”. (1,0)