



PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 19 de maio de 2009

Duração da Prova: 115 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

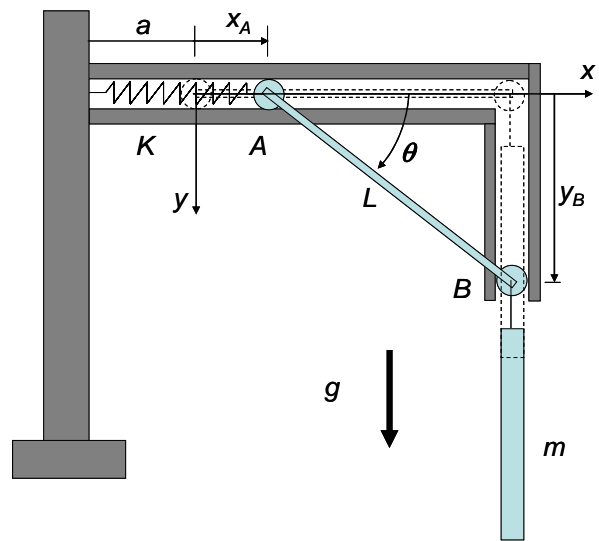
1ª Questão (1,0 ponto)

Responda: Do que tratou a palestra proferida no dia 23 de abril, pelo Prof. J.A.P. Aranha? Descreva o tema tratado, fazendo alusão aos conceitos ministrados na disciplina e que por ele foram utilizados. **Limite sua resposta a seis linhas.**

2ª Questão (3,0 pontos)

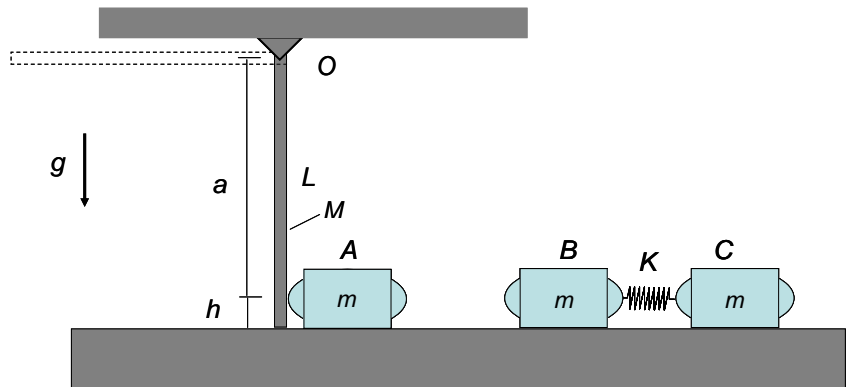
O sistema ao lado tem um bloco de massa m , suspenso através de um fio ideal a partir do ponto B . A barra rígida AB , de massa desprezível e comprimento L , está articulada em dois pinos que deslizam sem atrito ao longo das canaletas. A mola estará não-deformada, com comprimento natural a , quando a barra estiver na posição horizontal. Pede-se:

- Expresse as coordenadas x_A e y_B em função da coordenada angular θ ; (x_A é medida a partir da posição indeformada da mola);
- Determine os deslocamentos virtuais δx_A e δy_B , expressando-os em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- Determine o trabalho virtual das forças externas aplicadas à barra, expressando-o em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), deduza a equação cuja raiz fornece o ângulo de equilíbrio do sistema: θ_{eq} .



3ª Questão (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura abaixo está inicialmente em repouso. A barra rígida, de massa M e comprimento $L = a + h$, é articulada em O . A barra parte da posição horizontal sob a ação da gravidade. O choque com o bloco rígido A , de massa m , se dá quando a barra está na vertical. Após o impacto, o bloco A desliza sobre o plano horizontal, vindo a se chocar contra o bloco B , o qual está preso ao bloco C por meio de uma mola linear de constante elástica K . Os blocos B e C são idênticos ao bloco A . Admite-se que não haja atrito no contato entre os blocos e o plano e considera-se válida a hipótese de restituição de Newton de tal forma que os coeficientes de restituição são: (i) entre barra e bloco: e_1 ; (ii) entre blocos: e_2 . Pede-se:

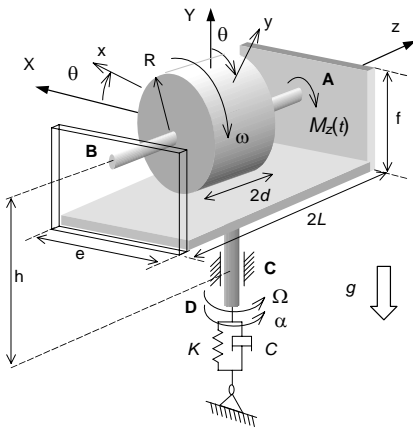
- A velocidade angular Ω da barra no instante imediatamente anterior ao primeiro choque;
- Em função de Ω : a velocidade v'_A do bloco A e a velocidade angular Ω' da barra, no instante imediatamente posterior ao primeiro choque;
- As velocidades (v''_A, v''_B, v''_C), dos blocos A, B e C , no instante imediatamente posterior ao segundo choque.





4ª Questão (3,0 pontos) - Baseada no EMSC#2

As figuras abaixo mostram dois conjuntos de gráficos de variáveis cinemáticas e dinâmicas em função do tempo, correspondentes às duas simulações estudadas no EMSC#02. Analisando-os e confrontando-os, responda, justificando:



(Simulação 1)

(Simulação 2)

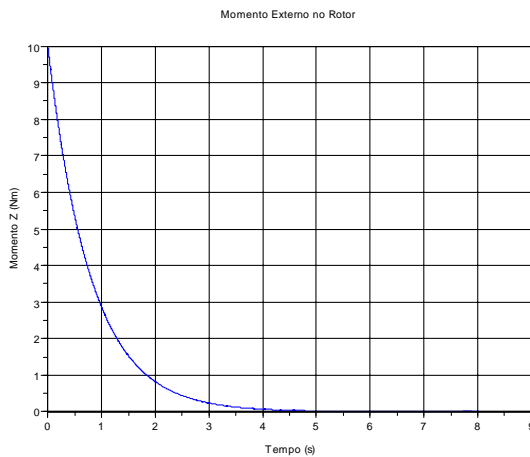


Fig 1a. Torque fornecido pelo motor.

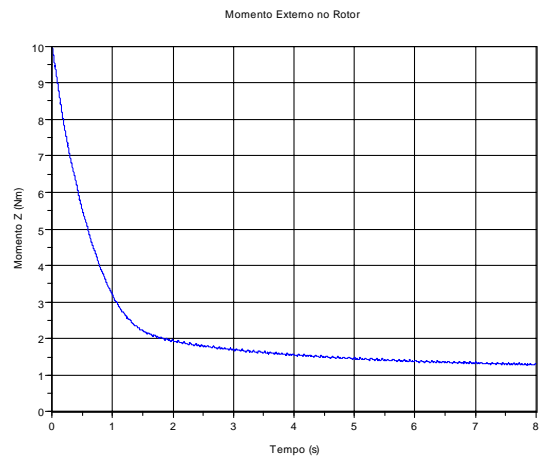


Fig 2a. Torque fornecido pelo motor.

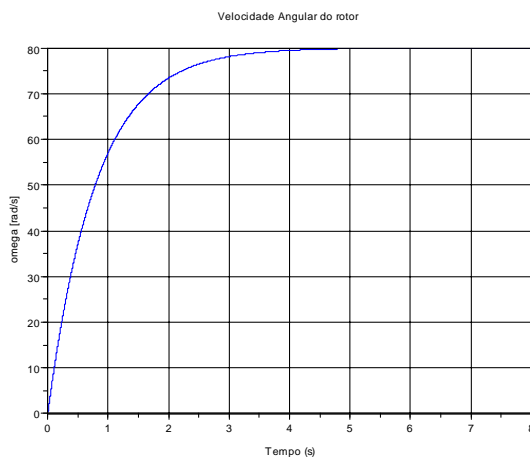


Fig. 1b. $\omega(t)$.

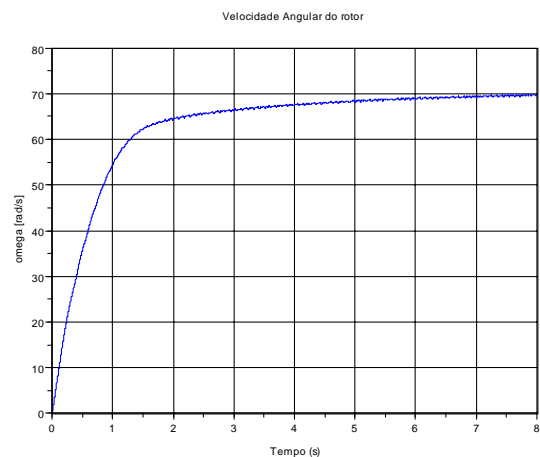


Fig. 2b. $\omega(t)$.

- Qual simulação corresponde ao caso desbalanceado e qual é o tipo de desbalanceamento existente?
- Por que, na simulação 1, a rotação da base permanece constante e por que, na simulação 2, a frequência de oscilação da rotação da base aumenta com o tempo até que o regime estacionário seja atingido?
- Observando as envoltórias das curvas de deslocamento vertical, quais fenômenos ficam evidentes? Descreva-os.

Faça referência às figuras apresentadas *se e quando* julgar necessário.

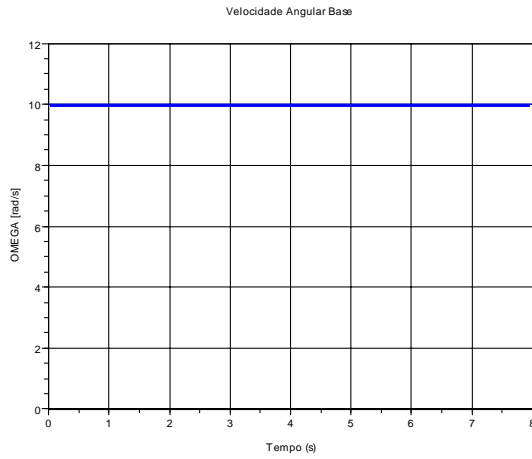


Fig. 1c. $\Omega(t)$.

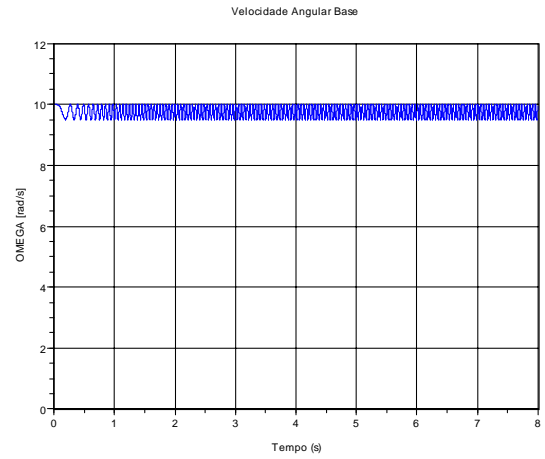


Fig. 2c. $\Omega(t)$.

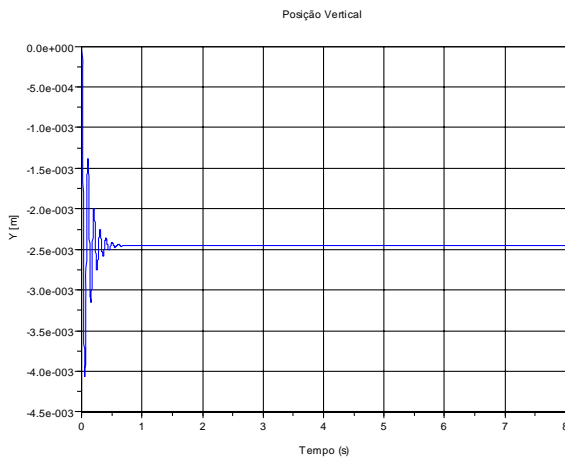


Fig 1d. $Y(t)$.

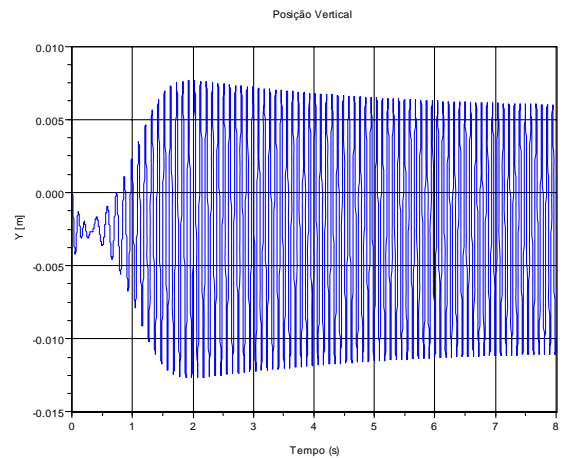


Fig 2d. $Y(t)$.

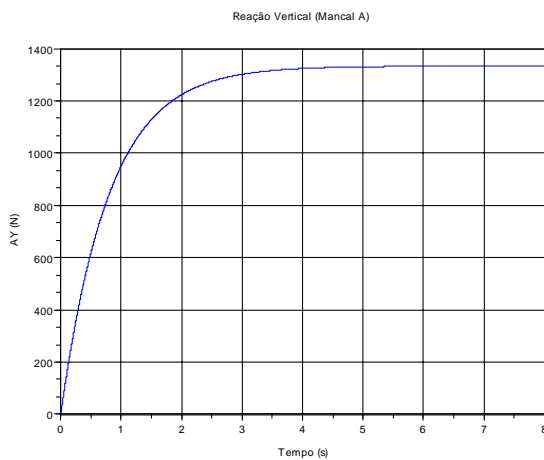


Fig 1e. Reação vertical no mancal A, $A_Y(t)$.

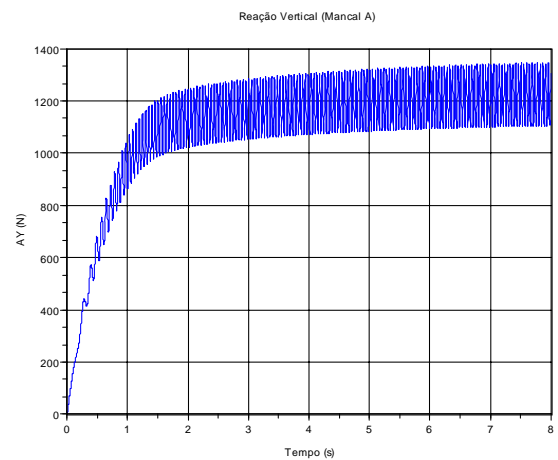


Fig 2e. Reação vertical no mancal A, $A_Y(t)$.



PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 19 de maio de 2009
RESOLUÇÃO

1ª Questão (1,0 ponto)

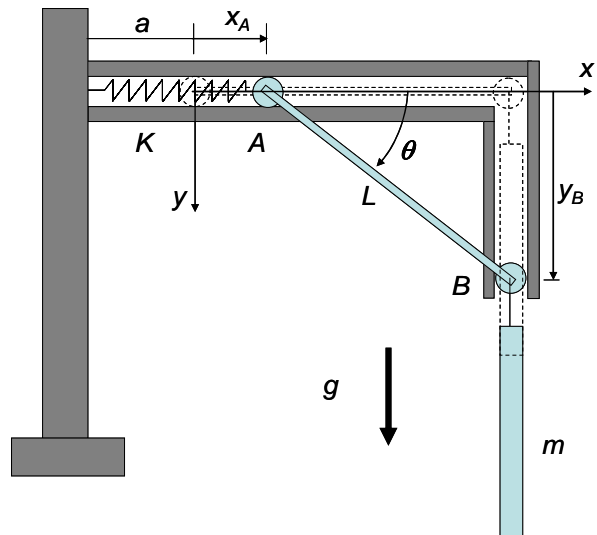
Resposta: Do que tratou a palestra proferida no dia 23 de abril, pelo Prof. J.A.P. Aranha? Descreva o tema tratado, fazendo alusão aos conceitos ministrados na disciplina e que por ele foram utilizados. *Limite sua resposta a seis linhas.*

Resposta: A palestra tratou dos conceitos de ‘*massa e inércia adicionais*’ de um corpo rígido’ avançando em meio fluido, fazendo considerações simplificadas acerca do problema de estabilidade da trajetória, com resultados aplicáveis ao projeto da *empenagem* de aeronaves. O denominado ‘Momento de Munk’ foi deduzido para um corpo esbelto e o *problema de estabilidade foi abordado*, através dos clássicos *Teoremas do Momento Angular e do Movimento do Baricentro*. Analogia foi feita com o problema de estabilidade de barras flexíveis. (1,0)

2ª Questão (3,0 pontos)

O sistema ao lado tem um bloco de massa m , suspenso através de um fio ideal a partir do ponto B . A barra rígida AB , de massa desprezível e comprimento L , está articulada em dois pinos que deslizam sem atrito ao longo das canaletas. A mola estará não-deformada, com comprimento natural a , quando a barra estiver na posição horizontal. Pede-se:

- Expresse as coordenadas x_A e y_B em função da coordenada angular θ ; (x_A é medida a partir da posição indeformada da mola);
- Determine os deslocamentos virtuais δx_A e δy_B , expressando-os em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- Determine o trabalho virtual das forças externas aplicadas à barra, expressando-o em função do deslocamento virtual $\delta\theta$;
- Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), deduza a equação cuja raiz fornece o ângulo de equilíbrio do sistema, θ_{eq} .



Resolução:

(a) $x_A = L(1 - \cos \theta)$; $y_B = L \sin \theta$ (0,5)

(b) $\delta x_A = L \sin \theta \delta \theta$; $\delta y_B = L \cos \theta \delta \theta$ (1,0)

(c) $\delta \tau^{ext} = -K x_A \delta x_A + mg \delta y_B = -KL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta + mgL \cos \theta \delta \theta$,

portanto: $\delta \tau^{ext} = (-KL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta + mgL \cos \theta) \delta \theta$ (0,5)

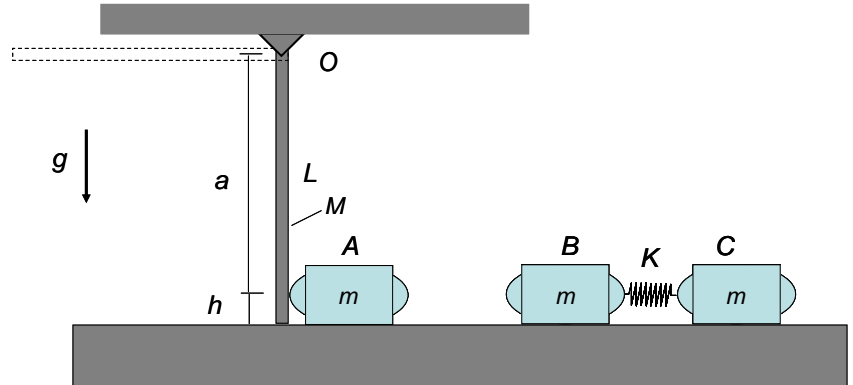
(d) pelo PTV, se o sistema está em equilíbrio $\delta \tau^{ext} = 0$, que conduz, para um deslocamento virtual arbitrário, à

seguinte condição de equilíbrio: $\sin \theta_{eq} (1 - \cos \theta_{eq}) = \frac{mg}{KL} \cos \theta_{eq}$. (1,0)



3ª Questão (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura abaixo está inicialmente em repouso. A barra rígida, de massa M e comprimento $L = a + h$, é articulada em O . A barra parte da posição horizontal sob a ação da gravidade. O choque com o bloco rígido A , de massa m , se dá quando a barra está na vertical. Após o impacto, o bloco A desliza sobre o plano horizontal, vindo a se chocar contra o bloco B , o qual está preso ao bloco C por meio de uma mola linear de constante elástica K . Os blocos B e C são idênticos ao bloco A . Admite-se que não haja atrito no contato entre os blocos e o plano e considera-se válida a hipótese de restituição de Newton de tal forma que os coeficientes de restituição são: (i) entre barra e bloco: e_1 ; (ii) entre blocos: e_2 . Pede-se:

- (d) A velocidade angular Ω da barra no instante imediatamente anterior ao primeiro choque;
- (e) Em função de Ω : a velocidade v'_A do bloco A e a velocidade angular Ω' da barra, no instante imediatamente posterior ao primeiro choque;
- (f) As velocidades (v''_A, v''_B, v''_C) , dos blocos A, B e C , no instante imediatamente posterior ao segundo choque.



Resolução:

(a) Pelo Teorema da Energia: $Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \Omega^2$, de onde: $\Omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$. (0,5)

(b) Tomando o pólo O , a conservação do momento angular do subsistema [barra + bloco A], com $a = L - h$, fornece:

$$\frac{ML^2}{3} \Omega = \frac{ML^2}{3} \Omega' + amv'_A \quad (\text{Eq. 1}) \quad (0,5)$$

Por outro lado, da hipótese de restituição de Newton,

$$(v'_A - \Omega'a) = -e_1(0 - \Omega a), \text{ ou seja,}$$

$$(v'_A - \Omega'a) = e_1 \Omega a \quad (\text{Eq. 2}) \quad (0,5)$$

Da (Eq. 2) segue: $v'_A = (e_1 \Omega + \Omega')a$, que substituída na (Eq. 1) fornece

$$\Omega' = -\Omega \frac{\left(e_1 ma^2 - \frac{ML^2}{3} \right)}{\left(\frac{ML^2}{3} + ma^2 \right)} \text{ e, portanto, } v'_A = a\Omega \left(e_1 - \frac{\left(e_1 ma^2 - \frac{ML^2}{3} \right)}{\left(\frac{ML^2}{3} + ma^2 \right)} \right) \quad (\text{Eq. 3}). \quad (0,5)$$

(c) Durante o segundo choque:

(i) da hipótese de restituição de Newton: $v''_B - v''_A = -e_2(v'_B - v'_A)$, ou seja, $v''_B - v''_A = e_2 v'_A$ (Eq. 4)

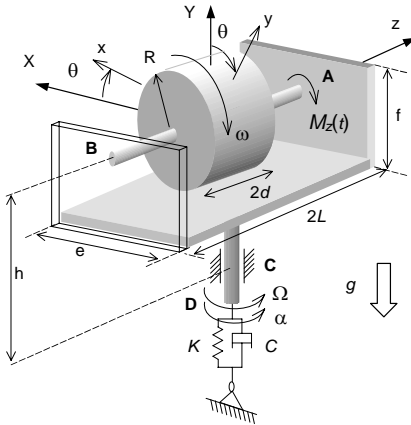
(ii) da conservação da quantidade de movimento: $mv'_A = mv''_A + mv''_B$, (Eq. 5), pois $v'_C = v''_C = 0$ (0,5), uma vez que, no choque ideal, embora a variação de velocidade seja instantânea, não há variação instantânea de posição. Ou seja, a mola não se deforma, instantaneamente.

Da (Eq. 4), $v''_B = v''_A + e_2 v'_A$, que substituída na (Eq. 5) traz: $v''_A = \frac{(1-e_2)}{2} v'_A$ e $v''_B = \frac{(1+e_2)}{2} v'_A$ (0,5), com v'_A dada pela (Eq. 3).



4ª Questão (3,0 pontos) - Baseada no EMSC#2

As figuras abaixo mostram dois conjuntos de gráficos de variáveis cinemáticas e dinâmicas em função do tempo, correspondentes às duas simulações estudadas no EMSC#02. Analisando-os e confrontando-os, responda, justificando:



- (a) Qual simulação corresponde ao caso desbalanceado e qual é o tipo de desbalanceamento existente?
- (b) Por que, na simulação 1, a rotação da base permanece constante e por que, na simulação 2, a frequência de oscilação da rotação da base aumenta com o tempo até que o regime estacionário seja atingido?
- (c) Observando as envoltórias das curvas de deslocamento vertical, quais fenômenos ficam evidentes? Descreva-os.

Faça referência às figuras apresentadas *se e quando* julgar necessário.

Respostas:

- (a) **A simulação 2 corresponde ao caso desbalanceado.** O desbalanceamento existente é do tipo ‘*excentricidade do centro de massa*’, também denominado ‘*estático*’. No caso analisado *o centro de massa está deslocado do eixo de rotação*, sobre o eixo *y* e com coordenada positiva neste eixo. (1,0)
- (b) **Na simulação 1 o rotor está perfeitamente balanceado, tanto estática quanto dinamicamente.** O sistema exibe, portanto, distribuição de massa perfeitamente simétrica. Desta forma, **ficam desacopladas as equações de movimento** que regem a dinâmica do sistema nos graus de liberdade (*Y, theta, alpha*) e, por conseguinte, **não há, em torno do eixo Y, torque aplicado pelo rotor à base**, nem **reações verticais cíclicas** são a ela transmitidas (mas apenas reações decorrentes do binário giroscópico que, neste caso, é monotonicamente crescente com o tempo). Como, além disso, **inexiste torque externo aplicado ao sistema em torno do eixo vertical Y**, não há aceleração angular da base e a rotação do conjunto em torno deste eixo permanece constante, mantendo-se com o valor inicial.
- Na simulação 2**, o desbalanceamento estático causa acoplamento dos 3 graus de liberdade. A rotação do rotor desbalanceado faz com que **o momento de inércia do conjunto em torno do eixo vertical varie ciclicamente**, com componente de frequência que é o dobro da rotação do rotor, **provocando variação cíclica da rotação da base** em torno deste eixo. Note que o valor médio da rotação da base é menor na simulação 2 porque, na média, o momento de inércia do conjunto em torno do eixo *Y* é maior do que no caso balanceado (veja que são os termos quadráticos, em $\sin^2\theta$ e $\cos^2\theta$, que aparecem multiplicando $\dot{\Omega}$ na Eq. (VIII) do enunciado do EMSC#2, que provocam o aparecimento de média diferente e contém componente de frequência com o dobro do valor da rotação do rotor). Média distinta e comportamento oscilatório são ambos refletidos na reação vertical dos mancais, conforme ilustra a Fig. 2e. (1,0)
- (c) **Na simulação 1** fica evidente o **movimento oscilatório com decaimento exponencial**, típico de osciladores lineares amortecidos (massa-mola-amortecedor). No caso o amortecimento é chamado *sub-crítico*. A posição vertical inicial é diferente da posição de equilíbrio, a qual é atingida assintoticamente após alguns ciclos de oscilação, que se faz na frequência natural amortecida do sistema no grau de liberdade *Y*.
- Na simulação 2**, após um transitório inicial, similar àquele da simulação 1, em que o conjunto busca assintoticamente a posição vertical de equilíbrio, evidencia-se o **fenômeno de resposta à varredura em frequência com ‘passagem pela ressonância’**. A rotação do rotor desbalanceado faz com que seja transmitida à base uma força cíclica de excitação na direção vertical, com frequência igual à rotação do motor. Como, na vertical, o sistema tem dinâmica linear, a frequência de oscilação acompanha linearmente a frequência de excitação, que aumenta com a rotação do rotor. No caso apresentado, os valores dos parâmetros da ‘curva do motor’ são suficientes para que a rotação do rotor ultrapasse a frequência natural do sistema associado ao modo de vibração vertical. Note que **parte da potência fornecida pelo motor é transferida para os outros dois graus de liberdade e parte desta potência transferida é dissipada pelo amortecedor. Quando em regime permanente, a potência dissipada será igual à potência fornecida pelo motor, limitando assim a rotação máxima de operação.** Ou seja, a rotação máxima depende do grau de desbalanceamento. (1,0)