ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

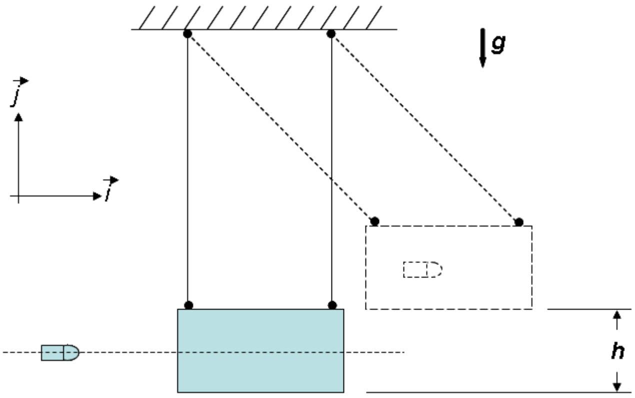
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 20 de maio de 2008

Gabarito

1ª Questão (3,0 pontos)

O pêndulo balístico é um dispositivo usado para medir a velocidade de um projétil de alta velocidade, como uma bala. A bala de massa m é disparada horizontalmente contra um grande bloco de madeira de massa M, suspenso por arames leves. A bala incrusta-se no bloco de madeira e o bloco e a bala elevam-se a uma altura h conforme a figura. Pede-se determinar a velocidade v que a bala tem antes do choque.



i) O choque é perfeitamente plástico: bala e bloco terão a mesma velocidade v' após o choque;

ii) A quantidade de movimento do sistema é conservada:

$$mv = (m+M)v' \; ; \qquad \textbf{(1,0)}$$

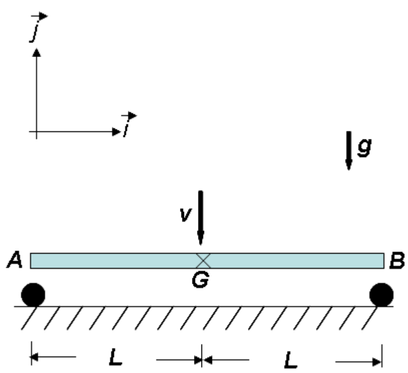
iii) A energia cinética do sistema é transformada em energia potencial:

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M)gh \quad \Rightarrow \quad v' = \sqrt{2gh} \; ; \qquad \textbf{(1,5)}$$

iv) de ii) e iii):

$$v = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh} \qquad \textbf{(0,5)}$$

2ª Questão (3,5 pontos)



Uma barra homogênea *AB* de massa *m* e comprimento *2L* cai, mantendo-se horizontal, até se chocar simultaneamente com dois anteparos, conforme a figura. Imediatamente antes do choque a velocidade do baricentro da barra é *v*. Não há atrito nos pontos de contato e os anteparos são feitos de materiais diferentes, de modo que os coeficientes de restituição e_A e e_B, respectivamente dos pontos *A* e *B*, são diferentes. Pede-se:

a) calcule a velocidade angular ω' da barra e a velocidade $\vec{v}'_G$ do seu centro de massa imediatamente após o choque;

b) empregando as expressões obtidas no item anterior, considere agora $e_A = e_B$ e calcule ω' e $\vec{v}'_G$ para essa nova situação. Interprete o valor de ω' assim obtido.

a)

i) Choque em *A*:

$$v'_A = -e_A(-v) \;; \qquad \textbf{(0,5)}$$

ii) Choque em *B*:

$$v'_B = -e_B(-v) \;; \qquad \textbf{(0,5)}$$

iii) Poisson:

$$v'_B = v'_A + \omega' 2L \;; \qquad \textbf{(0,5)}$$

iv) De i), ii) e iii):

$$\omega' = \frac{v}{2L}\left(e_B - e_A\right) \;; \qquad \textbf{(0,5)}$$

v) Poisson:

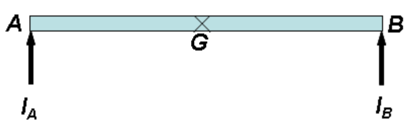
$$v'_G = v'_A + \omega' L \;; \qquad \textbf{(0,5)}$$

vi) De i), iv) e v):

$$v'_G = \frac{v}{2}\left(e_A + e_B\right) \,. \qquad \textbf{(0,5)}$$

b)

TMI com pólo em *G*:



$$\left(I_B - I_A\right)L = J_{Gz}\omega'$$

Para $e_A = e_B = e$ haverá simetria no problema ($I_A = I_B = I$). OTMI $\Rightarrow$ $\omega' = 0$. Como não haverá rotação, teremos o comportamento de um choque central direto e, portanto, $v'_G = ev$. Esses resultados são exatamente os obtidos pelas expressões iv) e vi) quando se faz $e_A = e_B = e$. **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

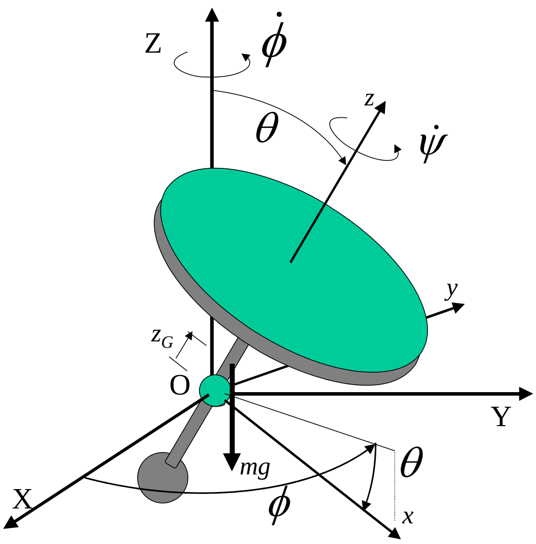
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos)

Baseada no Exercício de Modelagem e Simulação Computacional # 02 - EMSC#2

Considere, conforme mostra a figura abaixo, um pião. Considere também a equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea e não-linear, que rege o movimento do 'pião', onde α e β são dois invariantes do movimento:

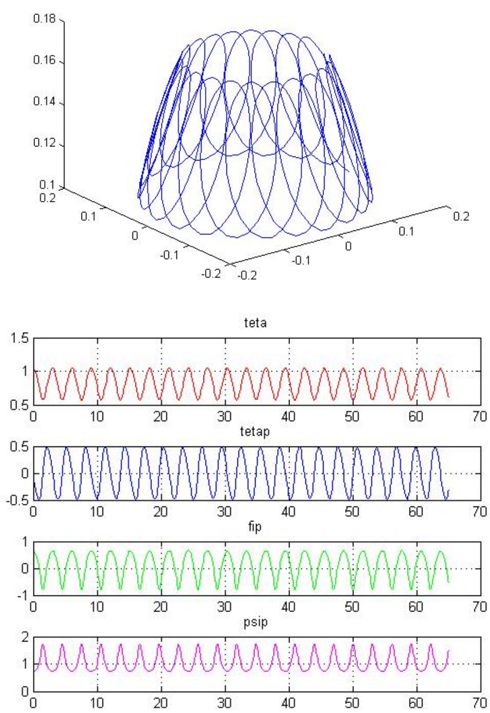
$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\beta - \alpha\cos\theta)}{I\,\mathrm{sen}^3\theta} - mgz_G\,\mathrm{sen}\theta = 0 \qquad (1)$$



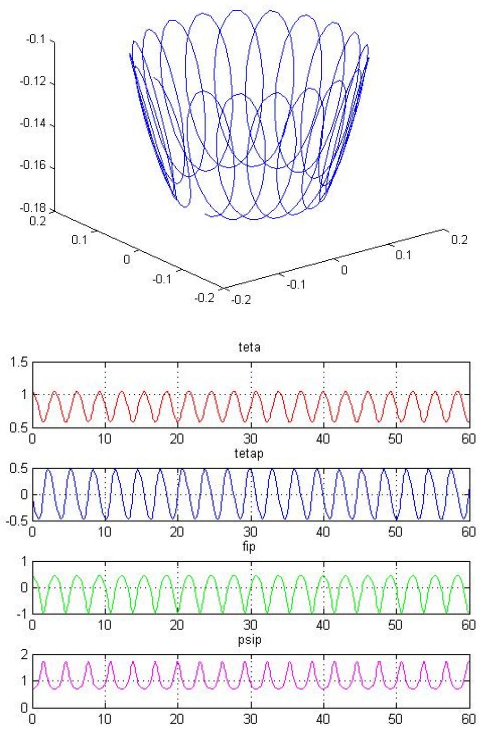
(a) Responda e comente de forma consubstanciada:
(1) O que representam os dois invariantes do movimento?
(2) A equação de movimento (1) será válida caso haja atrito na articulação? Justifique.

(b) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\overline{\dot{\phi}} = \Omega$, considerando conhecidos os valores da taxa de rotação própria $\overline{\dot{\psi}} = \omega$, constante, e do ângulo de equilíbrio $\overline{\theta}$. Discuta a expressão obtida.

(c) As figuras a seguir mostram a trajetória do centro de massa (CG) do pião no sistema cartesiano (X,Y,Z) e as evoluções temporais das variáveis $(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$, determinadas em duas das simulações solicitadas no EMSC#2, através da Eq. (1), com $\overline{\theta} = \pi/4$; $\overline{\dot{\psi}} = \omega = 1{,}0\,\mathrm{rad/s}$ e $\theta(0) = \pi/3; \dot{\theta}(0) = 0$.
Pergunta-se:
(1) Que tipo de movimento o pião executa em cada uma das simulações? Interprete os laços que comparecem nas trajetórias do CG e identifique às simulações as correspondentes coordenadas $z_G = \pm 0{,}2\,\mathrm{m}$.
(2) Em qual delas a precessão é, em média, retrógrada? Como isto é fisicamente possível? Justifique.



(Simulação I)



(Simulação II)

Resolução:

(a) Responda e comente de forma consubstanciada:

(1) O que representam os dois invariantes do movimento? **(0,5)**

R: Os parâmetros $\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\text{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)$ *e* $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)$ *representam, respectivamente, as componentes do Momento Angular do pião segundo os eixos* OZ *(vertical) e* Oz *(de rotação própria). Ser invariante significa não apresentar variação no tempo. Ou seja, as taxas de precessão,* $\dot{\phi}$*, rotação própria,* $\dot{\psi}$ *e o ângulo de nutação,* θ*, ajustam-se ao longo do tempo de forma a manter os dois parâmetros constantes. Isto ocorre quando da inexistência de torque externo aplicado em torno desses eixos, como no presente caso, de um pião sob a ação da força peso e sem atrito.*

(2) A equação de movimento (1) será válida caso haja atrito na articulação? Justifique. **(0,5)**

R: Não, a eq. (1) não será válida. Isto porque, a existência de atrito na articulação implicaria em torques (dissipativos) aplicados em torno dos eixos vertical e de rotação própria, provocando a variação das respectivas componentes do momento angular.

(b) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\overline{\dot{\phi}} = \Omega$, considerando conhecidos os valores da taxa de rotação própria $\overline{\dot{\psi}} = \omega$, constante, e do ângulo de equilíbrio $\overline{\theta}$. Discuta a expressão obtida.

R: Precessão estacionária significa: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0;\ \dot{\psi} = \omega;\ \dot{\phi} = \Omega;\ \theta = \overline{\theta}$. *Portanto, de* $\beta = K_{Oz} = J(\omega + \Omega\cos\overline{\theta})$ *, vem a taxa de precessão estacionária:*

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{\cos\overline{\theta}}\left(\frac{\beta}{J} - \omega\right)} \qquad (2) \qquad \textbf{(0,5)}$$

Ou, da eq. (1), segue uma relação entre $\overline{\theta}, \alpha$ e β*, na forma,*

$$\boxed{\frac{(\alpha - \beta\cos\overline{\theta})(\beta - \alpha\cos\overline{\theta})}{I\text{sen}^3\overline{\theta}} = mgz_G\text{sen}\overline{\theta}} \qquad (3)$$

Da qual, com $\alpha = K_{OZ} = I\Omega\text{sen}^2\overline{\theta} + J\cos\overline{\theta}(\omega + \Omega\cos\overline{\theta})$ *e* $\beta = K_{Oz} = J(\omega + \Omega\cos\overline{\theta})$ *, segue,*

$$\boxed{\cos\overline{\theta} = \frac{1}{(1-\frac{I}{J})\Omega^2}\left(\omega\Omega - \frac{mgz_G}{J}\right)} \qquad (4)$$

e

$$\boxed{\Omega = \frac{1}{2}\left\{-\frac{J\omega}{(J-I)\cos\overline{\theta}} \pm \sqrt{\left(\frac{J\omega}{(J-I)\cos\overline{\theta}}\right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J-I)\cos\overline{\theta}}}\right\}} \qquad (5) \qquad \textbf{(0,5)}$$

(c) As figuras a seguir mostram a trajetória do centro de massa (CG) do pião no sistema cartesiano (X,Y,Z) e as evoluções temporais das variáveis $(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$, determinadas em duas das simulações solicitadas no EMSC#2, através da Eq. (1), com $\overline{\theta} = \pi/4;\ \overline{\dot{\psi}} = \omega = 1{,}0\,\text{rad/s}$ e $\theta(0) = \pi/3; \dot{\theta}(0) = 0$. Pergunta-se:

(1) Que tipo de movimento o pião executa em cada uma das simulações? Interprete os laços que comparecem nas trajetórias do CG e identifique às simulações as correspondentes coordenadas $z_G = \pm 0{,}2\,\text{m}$. **(1,0)**

R: Nas duas simulações o pião executa movimento combinado de rotação própria ('spin'), nutação e precessão, com taxas variáveis, de forma a manter constantes as componentes de momento angular nas direções dos eixos vertical e de rotação própria (os parâmetros α *e* β*). Alguns autores denominam tais casos como 'precessão pseudo-regular'. O movimento do pião, em ambos os casos, é regular e periódico. A energia mecânica* *(cinética+potencial) é conservada (o terceiro invariante). Os laços indicam que a precessão inverte de sentido periodicamente, porém mantém média não-nula, e o pião avança girando em torno do eixo OZ, sistematicamente, em um determinado sentido. A Simulação I tem taxa média de precessão positiva e corresponde ao caso* $z_G = +0{,}2\,\mathrm{m}$ *. Por sua vez, a Simulação II apresenta taxa média de precessão negativa, com menor intensidade, e corresponde ao caso* $z_G = -0{,}2\,\mathrm{m}$.

(2) Em qual delas a precessão é, em média, retrógrada? Como isto é fisicamente possível? Justifique. **(0,5)**
R: A precessão é direta na Simulação I e retrógrada na Simulação II. A primeira situação, mais comum, é possível porque o momento proporcionado pela força peso em torno do eixo do nós (Oy) é positivo. Quando em equilíbrio dinâmico (precessão estacionária) este momento é contrabalançado por um binário giroscópico em sentido oposto. Uma variação positiva do ângulo de nutação causará então um aumento da taxa de precessão, de forma a aumentar a restauração proporcionada pelo binário giroscópico. O inverso ocorre quando a variação do ângulo de nutação for negativa. Na Simulação II o momento proporcionado pela força peso em torno do eixo do nós (Oy) é negativo e o raciocínio se aplica, de forma análoga, porém com o sentido da precessão invertido, relativamente ao que ocorre na Simulação I .