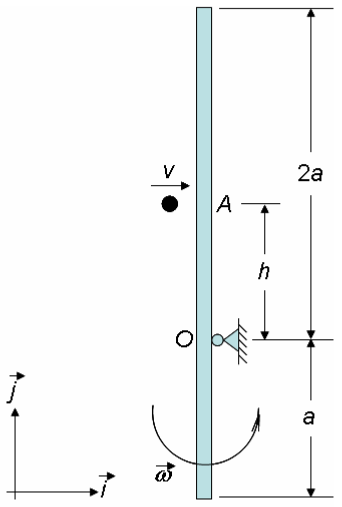
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 22 de maio de 2007 - Gabarito

1ª Questão (3,5 pontos) Uma barra de massa M e comprimento $3a$ gira em torno de um ponto O com vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ constante. Em um dado instante, quando ela se encontra paralela ao versor $\vec{j}$, a barra é atingida por uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v} = v\vec{i}$, em seu ponto A.



a) Supondo que o choque foi perfeitamente anelástico, determine qual deve ser a altura h para que a barra tenha velocidade angular nula no instante imediatamente após o choque. Sob que condição esta situação é possível?

b) Determine a perda de energia cinética que ocorre durante o choque.

a) No sistema isolado, formado pela massa $\boldsymbol{m}$ e pela barra rígida articulada em (O), a única *força externa* aplicada ao *sistema* é a força reativa na articulação. O momento dessa força em relação a (O) é nulo e, portanto, o momento angular $\vec{H}_O$ do sistema conserva-se. (0,5)

Mas

$$\vec{H}_O = J_O \omega \vec{k} + h \vec{j} \wedge m v \vec{i} = (J_O \omega - m v h)\vec{k} \quad (0,5)$$

e como o sistema fica em repouso após o impacto ($\vec{H}_O = \vec{0}$) a conservação do momento angular obriga que $\vec{H}_O = \vec{0}$ seja nulo para todo o tempo; portanto

$$h = \frac{J_O \omega}{m v} \quad (0,5)$$

O momento de inércia de uma barra homogênea de massa M em relação ao centro de gravidade é igual a $M l^2/12$, onde l é o comprimento da barra. Portanto

$$J_O = J_G + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{M(3a)^2}{12} + \frac{M a^2}{4} = M a^2 \quad (0,5)$$

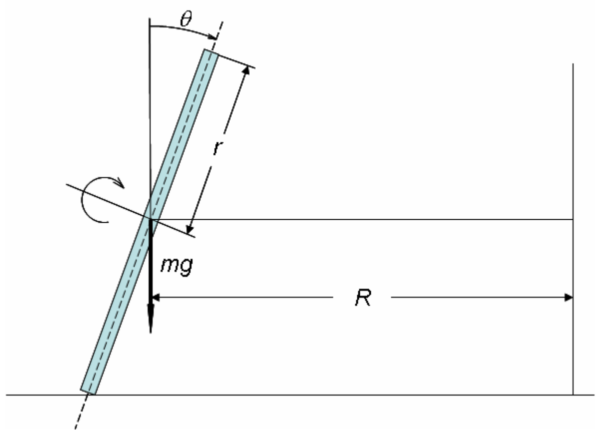
Esta situação só é possível se $h < 2a$, ou seja, se

$$h = \frac{Ma^2\omega}{mv} < 2a \qquad (0,5)$$

b) A energia cinética final será nula, portanto a perda de energia cinética será igual à energia cinética inicial:

$$\Delta T = -\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\,a^2\omega^2\right) \qquad (1,0)$$

2ª Questão (3,0 pontos) Um disco homogêneo de raio r e massa m está se movendo em uma trajetória circular de raio R, sobre um plano horizontal, de maneira que seu baricentro tem velocidade uniforme v. Devido a efeitos giroscópicos, o disco inclina-se de um ângulo θ, como mostrado na figura. Sabendo que não há escorregamento entre o disco e o plano, determine o ângulo θ.



- Vetores de rotação (1,0)

- Movimento absoluto

$$\vec{V}_{O_{abs}} = \vec{0}\,; \qquad \vec{V}_{G_{abs}} = -V\vec{k}$$

$$\vec{V}_{G_{abs}} = \vec{V}_{O_{abs}} + \vec{\omega}_{abs} \wedge (G - O)\,; \text{ onde } \vec{\omega}_{abs} = \omega_t\vec{t} + \omega_n\vec{n} + \omega_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow -V\vec{k} = \left(\omega_t\vec{t} + \omega_n\vec{n} + \omega_z\vec{k}\right) \wedge \left(r\vec{t}\right)$$

$$\Rightarrow -V\vec{k} = -\omega_n r\vec{k} + \omega_z r\vec{n} \qquad \Rightarrow\ \omega_n = \frac{V}{r}, \omega_z = 0, \omega_t = ?$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

- Movimento de arrastamento

$$\vec{\omega}_{arr} = -\frac{V}{R}\vec{K} \text{ ; onde } \vec{K} = \cos\theta\vec{t} + sen\theta\vec{n}$$

$$\vec{V}_{G_{arr}} = \vec{V}_{A_{arr}} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (G - A) \quad \Rightarrow \vec{V}_{G_{arr}} = -\left(\frac{V}{R}R\cos^2\theta + \frac{V}{R}Rsen^2\theta\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{G_{arr}} = -V\vec{k}$$

- Movimento relativo

$$\vec{\omega}_{rel} = \omega_{rel}\vec{n}$$

- Composição de movimentos

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel}$$

$$\Rightarrow \omega_t\vec{t} + \frac{V}{r}\vec{n} = \omega_{rel}\vec{n} - \frac{V}{R}\cos\theta\vec{t} - \frac{V}{R}sen\theta\vec{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_{rel} = \left(\frac{V}{r} + \frac{V}{R}sen\theta\right)\vec{n} \\ \vec{\omega}_{arr} = -\frac{V}{R}sen\theta\vec{n} - \frac{V}{R}\cos\theta\vec{t} \\ \vec{\omega}_{abs} = -\frac{V}{R}\cos\theta\vec{t} + \frac{V}{r}\vec{n} \end{cases}$$

- Aceleração do baricentro

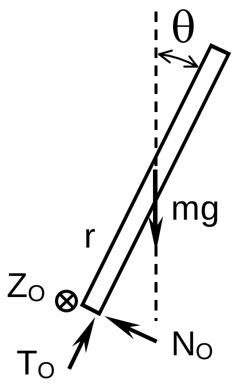
$$\vec{a}_{G_{abs}} = \vec{a}_{G_{arr}} \text{ , pois } \vec{a}_{G_{rel}} = \vec{a}_{G_{Cor}} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{G_{arr}} = \vec{a}_{A_{arr}} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} \wedge (G - A) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (G - A)]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_{arr}} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (G - A)] \qquad \Rightarrow \vec{a}_{G_{abs}} = \vec{a}_{G_{arr}} = \frac{V^2}{R}sen\theta\vec{t} - \frac{V^2}{R}\cos\theta\vec{n}$$

- TMB (1,0)

$$\begin{cases} T_O - mg\cos\theta = m\frac{V^2}{R}sen\theta \\ N_O - mgsen\theta = -m\frac{V^2}{R}\cos\theta \\ Z_O = 0 \end{cases}$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

- TMA, pólo em G (1,0)

$$\vec{M}_G = m(G-G)\wedge \vec{a}_G + \frac{d}{dt}[I_G]\{\vec{\omega}_{abs}\}$$

onde $$[I_G]\{\vec{\omega}_{abs}\} = \{\vec{t} \quad \vec{n} \quad \vec{k}\}\begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{V}{R}\cos\theta \\ \frac{V}{r} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow -Z_O r\vec{n} - N_O r\vec{k} = -\frac{mr^2}{4}\frac{V}{R}\cos\theta\dot{\vec{t}} + \frac{mVr}{2}\dot{\vec{n}} \text{ ; onde } \begin{cases} \dot{\vec{t}} = \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{t} = \frac{V}{R}sen\theta\vec{k} \\ \dot{\vec{n}} = \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{n} = -\frac{V}{R}\cos\theta\vec{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_O = 0 \\ -mgrsen\theta + \frac{mV^2r}{R}\cos\theta = -\frac{mr^2}{4}\frac{V^2}{R^2}sen\theta\cos\theta - \frac{mV^2r}{2R}\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{tg\theta = \frac{V^2}{Rg}\left(\frac{1}{4}\frac{r}{R}sen\theta + \frac{3}{2}\right)}$ que tende assintoticamente a $\boxed{tg\theta \cong \frac{3}{2}\frac{V^2}{Rg}}$ se $\boxed{\frac{r}{R} << 1}$.

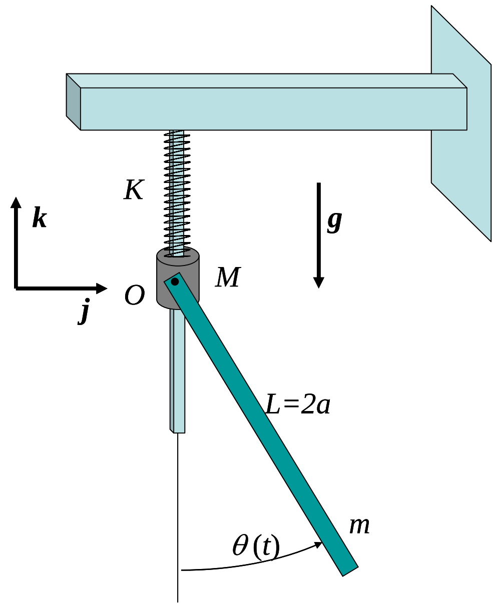
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos)

O EP2 solicitou a modelagem e a análise da dinâmica do sistema abaixo, via simulação realizada em ambiente SCICOS/SCILAB. **A presente questão aborda apenas parte do estudo, referente ao sistema completo, em oscilação livre**.



Sabe-se que as equações que regem o movimento do sistema são:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{z} + (ma\,\text{sen}\theta)\ddot{\theta} + ma\dot{\theta}^2\cos\theta + Kz = 0 \\ (ma\,\text{sen}\theta)\ddot{z} + \dfrac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} + mga\,\text{sen}\theta = 0 \end{cases} \quad . \qquad (1)$$

Sabe-se ainda que a linearização deste sistema, em torno de $\theta = 0$, considerando pequenos deslocamentos $\theta(t)$ e pequenas velocidades $\dot{\theta}(t)$, conduz a:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{z} + Kz = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\theta = 0 \end{cases} \quad , \qquad (2)$$

de tal forma que, nestas condições, duas freqüências naturais são prontamente identificáveis: $\Omega_1 = \sqrt{\dfrac{K}{M+m}}$ e $\Omega_2 = \sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}}$.

Parâmetros do sistema:

$g = 10\text{m/s}^2$; $M = m = 2\text{kg}$; $a = 0{,}75\text{m}$.

(a) No sistema (1) acima, ***isole***, a partir da Eq. (1b), a aceleração angular $\ddot{\theta}$, ***substituindo-a na Eq. (1a)***, e ***simplifique*** o sistema resultante:

De (1b): $\boxed{\ddot{\theta} = -\dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta\left(1 + \dfrac{\ddot{z}}{g}\right)}$, que substituída em (1a), leva ao seguinte sistema, (0,3)

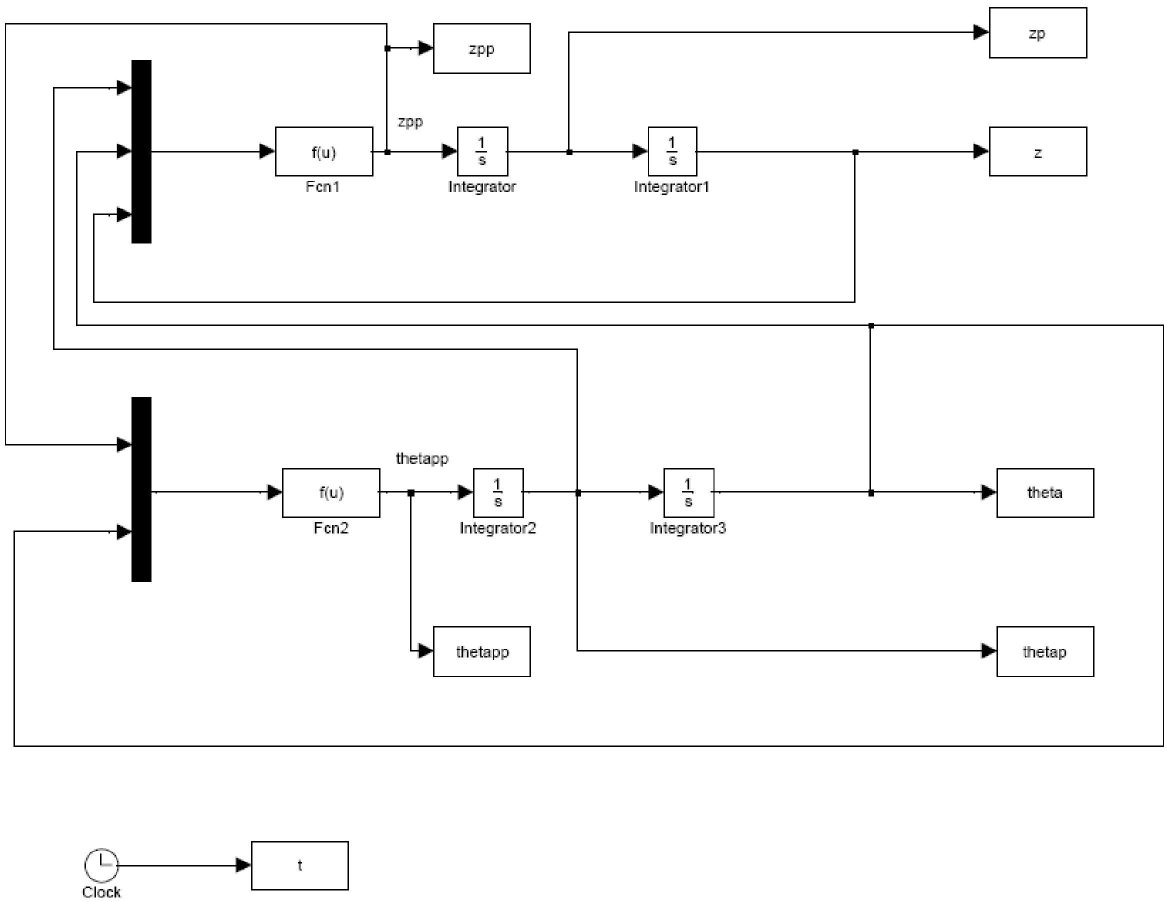
$$\begin{cases} (M+m)\ddot{z} - \dfrac{3}{4}mg\,\text{sen}^2\theta\left(1 + \dfrac{\ddot{z}}{g}\right) + ma\dot{\theta}^2\cos\theta + Kz = 0 \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta\left(1 + \dfrac{\ddot{z}}{g}\right) \end{cases} ,$$

que pode ser escrito:

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{z} = \dfrac{\dfrac{3}{4}mg\,\text{sen}^2\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta - Kz}{(M+m) - \dfrac{3}{4}m\,\text{sen}^2\theta} \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\text{sen}\theta\left(1 + \dfrac{\ddot{z}}{g}\right) \end{cases}}$$

(0,2)

(b) ***Construa*** um diagrama de simulação, em linguagem SCICOS, ***correspondente ao sistema assim modificado***, especificando claramente as funções (Scifunc) a ele associadas. ***Inclua***, no diagrama, saídas gráficas para as variáveis cinemáticas: $z(t),\theta(t)$; $\dot{z}(t),\dot{\theta}(t)$ e $\ddot{z}(t),\ddot{\theta}(t)$, ou seja, gráficos temporais de posição, velocidades e acelerações:



(0,8)

Fcn1: ((3/4)*M2*g*sin(u[2])^2-M2*a*u[1]^2*cos(u[2])-K*u[3])/((M1+M2)-(3/4)*M2*sin(u[2])^2)

Representando a equação:

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{\frac{3}{4}mg\mathrm{sen}^2\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta - Kz}{(M+m) - \frac{3}{4}m\mathrm{sen}^2\theta}}$$

Fcn2: -(3/4)*(g/a)*sin(u[2])*(1+u[1]/g)

Representando a equação:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\mathrm{sen}\theta\left(1+\frac{\ddot{z}}{g}\right)}$$

(0,2)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

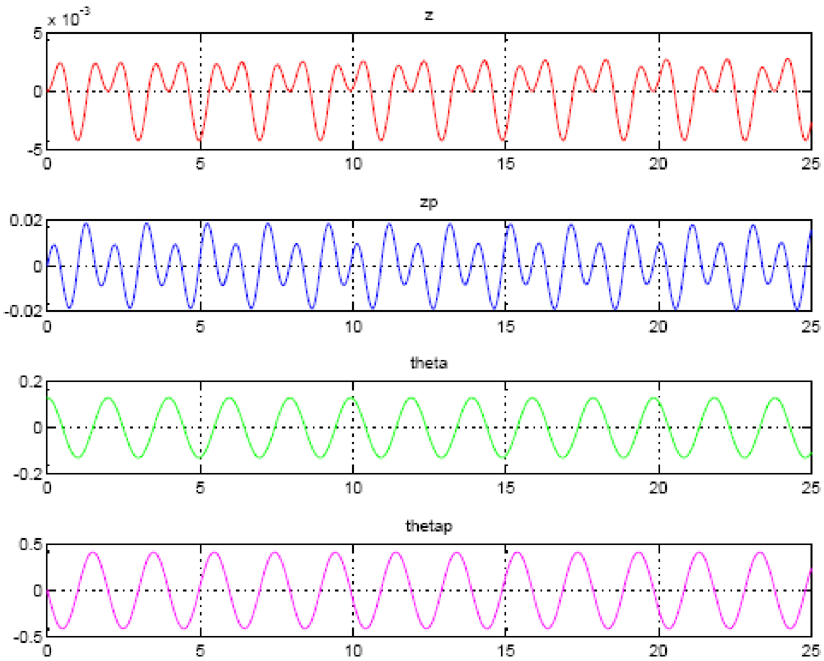
(c) ***Calcule*** os valores do parâmetro de rigidez da mola *K*, correspondentes aos seguintes valores da razão entre freqüências, $\beta = (\Omega_1/\Omega_2) = 1/4;\ 1/2;\ 1$ (ou seja, 1:4; 1:2; 1:1).

Têm-se: $g = 10\text{m/s}^2$; $M = m = 2\text{kg}$; $a = 0{,}75\text{m}$, de tal forma que $\boxed{\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} = \sqrt{10} \cong 3{,}1628\text{rad/s}}$. Como $\Omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$ a seguinte tabela é prontamente construída:

β	***K*** (N/m)	Ω_1(rad/s)
0,25	2,5	0,7906
0,5	10	1,5811
1	40	3,1623

(0,3)

(d) As duas simulações (A) e (B), mostradas abaixo, foram realizadas a partir das seguintes condições iniciais: $(z(0); \dot{z}(0); \theta(0); \dot{\theta}(0)) = (0; 0; \pi/24; 0)$. ***Calcule, aproximadamente***, os valores dos períodos típicos de oscilação (visíveis a partir de uma simples observação) que estão presentes nos sinais temporais $z(t), \theta(t)$.



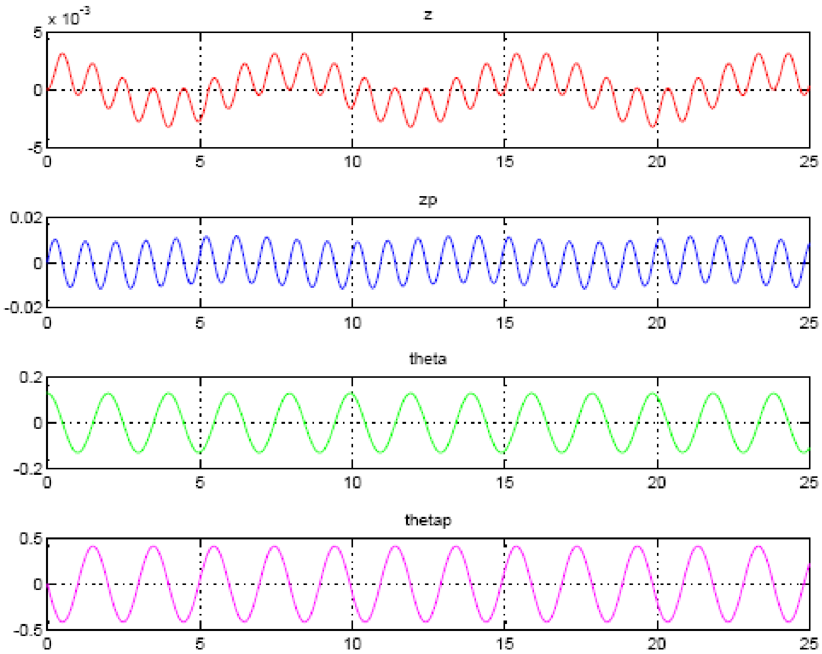
Simulação (A): *z* em metros. θ em radianos. Tempo em segundos.

Na simulação A têm-se, visíveis, dois períodos típicos de oscilação. Um deles é avaliado contando o número de ciclos no gráfico de $\theta(t)$. São aproximadamente 12,6 ciclos em 25s, ou seja: $\boxed{T_b \cong \frac{25}{12{,}6} = 1{,}984s}$. Corresponde a uma freqüência

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

$\boxed{\Omega_b = \frac{2\pi}{T_b} \cong 3{,}1667 \text{rad/s}}$. Este valor é bastante próximo de $\Omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{a}} = \sqrt{10} \cong 3{,}1628 \text{rad/s}$, calculada acima, que corresponde à freqüência natural do pêndulo em vibração isolada. (0,3)

O segundo período, prontamente identificável, é o que se refere ao duplo-pico que comparece no sinal temporal de $z(t)$. Para cada ciclo de oscilação com período $T_b \cong \frac{25}{12{,}6} = 1{,}984s$ têm-se dois ciclos de oscilação, portanto com período $T_a \cong 0{,}99s$, correspondente a uma freqüência $\Omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \cong 6{,}3334 \text{rad/s}$. Esta oscilação deve-se aos termos quadráticos: $\text{sen}^2\theta(t)$ e $\dot{\theta}^2(t)$, presentes na EDO que rege $z(t)$ e trata-se de um sub-harmônico de ordem 2. (0,2)



t

Simulação (B): *z* em metros. θ em radianos. Tempo em segundos.

Na simulação B, além dos períodos acima identificados (0,3), comparece uma terceira oscilação, bem mais lenta: são 3 ciclos, em cerca de 24 segundos: $\boxed{T_c \cong \frac{24}{3} = 8s}$, que corresponde a uma freqüência $\boxed{\Omega_c = \frac{2\pi}{T_c} \cong 0{,}785 \text{rad/s}}$. Trata-se de período muito próximo do período natural do sistema em um modo de vibração vertical, quando $K = 0{,}25 \text{N/m}$. (0,2)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes nº2231 CEP05508-900 São Paulo SP
Telefone: (011) 818-5337 Fax (011) 813-1886

Departamento de Engenharia Mecânica

(e) ***Identifique então (justificando)*** os valores de β, acima, que correspondem às duas simulações (A) e (B).

A simulação A corresponde a $\beta = 1:1$ ou $\beta = 1$.

Justificativa: tanto $\theta(t)$ quanto $z(t)$ vibram com uma mesma freqüência fundamental, $\Omega_b = \dfrac{2\pi}{T_b} \cong 3{,}1667\text{rad/s}$, muito próxima de $\Omega_1 = \Omega_2 = 3{,}1623\text{rad/s}$, que corresponde ao caso $\beta = 1; K = 40\text{N/m}$. (0,2)

A simulação B corresponde a $\beta = 1:4$ ou $\beta = 0{,}25$.

Justificativa: tanto $\theta(t)$ quanto $z(t)$ vibram com a freqüência $\Omega_b = \dfrac{2\pi}{T_b} \cong 3{,}1667\text{rad/s}$. Porém, $z(t)$ também apresenta uma segunda freqüência, bem mais baixa, $\Omega_c = \dfrac{2\pi}{T_c} \cong 0{,}785\text{rad/s}$, muito próxima do valor $\Omega_1 = 0{,}790\text{rad/s}$, que corresponde à freqüência natural do sistema em modo de vibração vertical, quando $\beta = 0{,}25; K = 2{,}5\text{N/m}$. (0,3)

(f) ***Responda (justificando)***: as simulações foram realizadas ***com*** ou ***sem*** amortecimento?

As simulações foram realizadas ***sem amortecimento***, pois não há perda de energia mecânica (o sistema mostra-se conservativo) (ou ainda, não há decréscimo de amplitude de oscilação ao longo do tempo). (0,2)