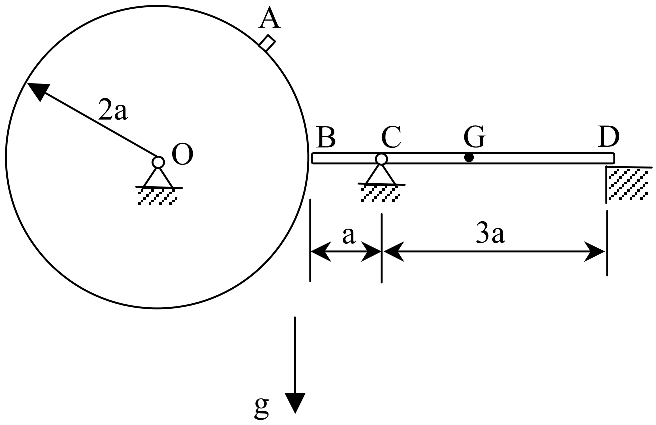
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – 2ª Prova – 23/5/2006 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



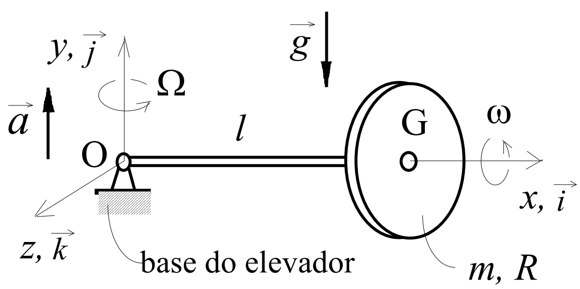
1ª Questão (3,5 pontos) A figura mostra um disco homogêneo, de massa m e raio 2a, que gira livremente em torno de seu centro fixo O com velocidade angular ω. Em um determinado instante o ressalto A do disco, de dimensões desprezíveis de forma a não alterar a distribuição de massa do disco, choca-se com a barra de massa m e comprimento 4a que está articulada em C e inicialmente em repouso. Sendo o coeficiente de restituição e, pede-se:

a) O diagrama de corpo livre apenas do disco e o diagrama de corpo livre apenas da barra.
b) Determine as velocidades angulares ω′ do disco e Ω′ da barra após o impacto.
c) O impulso reativo em O.
d) O mínimo valor de ω para que a barra venha a se chocar contra o disco.

2ª Questão (3,0 pontos)

1) No sistema da figura, o disco homogêneo (massa m, raio R) gira ao redor da barra OG (massa desprezível, comprimento l) com velocidade angular constante ω; a barra OG mantém a direção horizontal e gira com velocidade angular constante Ω ao redor do eixo vertical que passa pela articulação O. *O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante* $\underline{a\vec{j}}$. Usando o sistema de coordenadas (O,x,y,z) solidário à barra, pede-se:

a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de Ω para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de Ω determinado no item (b), calcule as reações na articulação O;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?



3ª Questão (3,5 pontos) (baseada no EP)

Considere o pião simétrico sujeito apenas à ação da força peso, representado na figura 3.1. O eixo fixo *OZ* é vertical e *O* é uma articulação. Nestas condições a equação diferencial que descreve o movimento do pião é,

$$I\ddot{\theta}+\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)(\beta-\alpha\cos\theta)}{I\mathrm{sen}^3\theta}=mgz_G\mathrm{sen}\theta$$

Onde $\alpha = K_{OZ} = I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)$ e

$\beta = K_{Oz} = J\left(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta\right)$, componentes do momento angular nas direções dos eixos *OZ* e *Oz*, respectivamente, são duas constantes que dependem apenas das condições iniciais do movimento; *I* e *J* são os momentos de inércia do pião em relação aos eixos *y* e *z* respectivamente. Os valores adotados nas simulações são:

$mgz_G = 0.2$ Nm; $I = 1{,}0$ kg m^2; $J = 2I$.

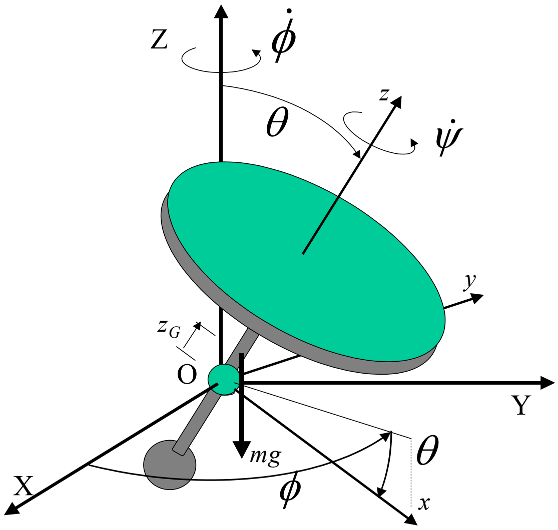


Figura 3.1

a) Esboce o digrama SCICOS para o problema.

- *A figura 3.2 mostra os gráficos das coordenadas do centro de massa do pião em função do tempo; os itens b), c) e d) referem-se a esta figura:*

b) Responda e justifique: que tipo de movimento é executado pelo pião?

c) Calcule aproximadamente o valor da velocidade de precessão $\dot{\phi}$.

d) Sabendo que no movimento descrito $\dot{\psi} > 0$, qual o sentido de $\dot{\phi}$?

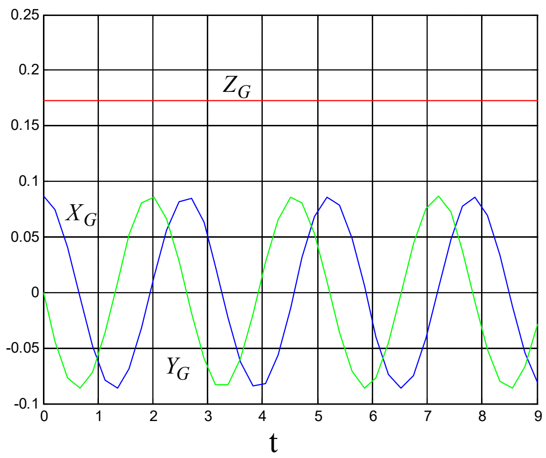


Figura 3.2

- *As figuras 3.3.1 e 3.3.2 mostram os gráficos de θ e $\dot{\theta}$ em função do tempo; sabendo que os dois movimentos descritos nestas figuras têm mesmos valores iniciais de ϕ e $\dot{\phi}$, responda e justifique:*

e) Em qual figura é apresentado o movimento que tem o maior valor inicial de $\dot{\psi}$?

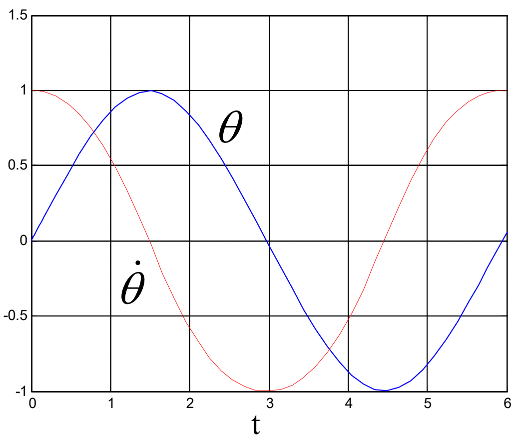


Figura 3.3.1

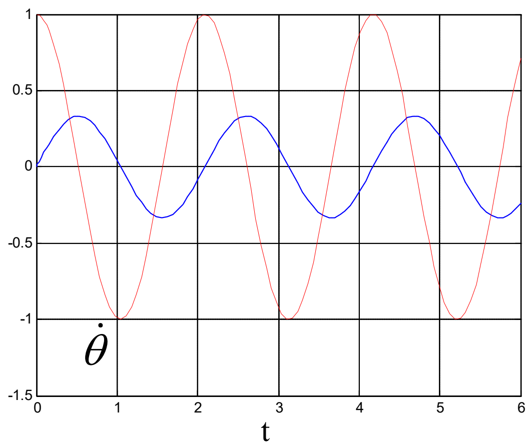
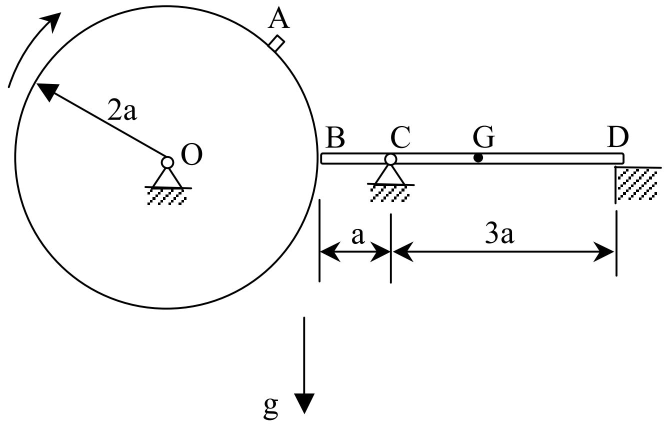


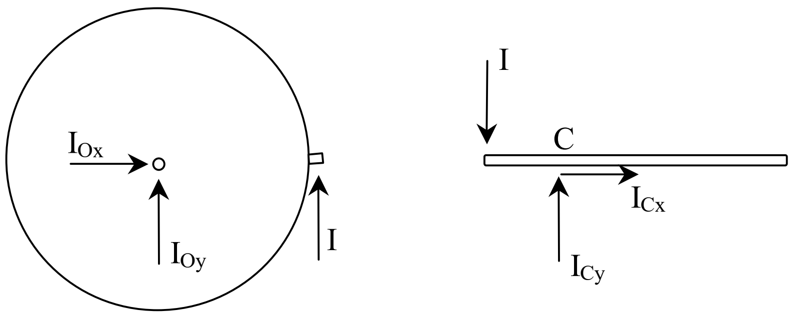
Figura 3.3.2

PME 2200 – MECÂNICA B – 2ª Prova – 23/5/2006 – Duração 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras).



1ª Questão (3,5 pontos) A figura mostra um disco homogêneo, de massa m e raio 2a, que gira livremente em torno de seu centro fixo O com velocidade angular ω. Em um determinado instante o ressalto A do disco, de dimensões desprezíveis de forma a não alterar a distribuição de massa do disco, choca-se com a barra de massa m e comprimento 4a que está articulada em C e inicialmente em repouso. Sendo o coeficiente de restituição e, pede-se:

e) O diagrama de corpo livre apenas do disco e o diagrama de corpo livre apenas da barra.
f) Determine as velocidades angulares ω' do disco e Ω' da barra após o impacto.
g) O impulso reativo em O.
h) O mínimo valor de ω para que a barra venha a se chocar contra o disco.



(0,5)

Eq. das velocidades relativas: $v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \Rightarrow \Omega' a - \omega' 2a = e\omega 2a$ (eq. 1) **(0,5)**

TMI no disco com pólo em O: $\Delta \vec{H}_O = \int \vec{M}_O \, dt \Rightarrow J_{zO}(-\omega' - (-\omega)) = 2Ia\,\vec{k}$ (eq. 2) **(0,5)**

TMI na barra com pólo em C: $\Delta \vec{H}_C = \int \vec{M}_C \, dt \Rightarrow J_{zC}\Omega' \vec{k} = Ia\,\vec{k}$ (eq. 3) **(0,5)**

Substituindo (eq. 2) em (eq. 3):

$$\Rightarrow \frac{4ma^2}{2}\omega - \frac{4ma^2}{2}\omega' = 2\left(\frac{16ma^2}{12} + ma^2\right)\Omega' \quad \Rightarrow \Omega' = \frac{3}{7}(\omega - \omega')$$

Substituindo em (eq. 1):

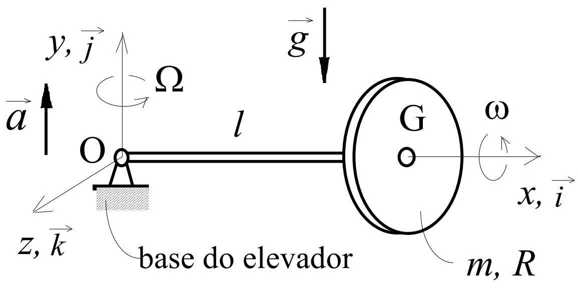
$$\boxed{\omega' = \frac{(3-14e)}{17}\omega} \rightarrow \boxed{\Omega' = \frac{6(1+e)}{17}\omega} \rightarrow \boxed{I = \frac{14ma(1+e)}{17}\omega}$$

TI no disco: $\vec{I} = \Delta\vec{Q} = \vec{0} \Rightarrow I_{Oy} = -I \rightarrow \boxed{I_{Oy} = -\frac{14ma(1+e)}{17}\omega}$ $\boxed{I_{Ox} = 0}$ **(0,5)**

Para a barra bater no disco o seu baricentro deverá atingir a altura máxima passando pela vertical do ponto C. Pelo TEC: $\Delta T = \tau \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{7ma^2}{3}\right)\Omega'^2 > mga \Rightarrow \Omega'^2 > \frac{6g}{7a} \rightarrow \boxed{\omega > \frac{17}{6(1+e)}\sqrt{\frac{6g}{7a}}}$ **(0,5)**

2ª Questão (3,0 pontos)

2) No sistema da figura, o disco homogêneo (massa *m*, raio *R*) gira ao redor da barra OG (massa desprezível, comprimento *l*) com velocidade angular constante ω; a barra OG mantém a direção horizontal e gira com velocidade angular constante Ω ao redor do eixo vertical que passa pela articulação O. *O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante* $a\vec{j}$. Usando o sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) solidário à barra, pede-se:



a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de Ω para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de Ω determinado no item (b), calcule as reações na articulação O;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?

$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \omega\vec{i} + \Omega\vec{j}}$ **(0,5)**

$\vec{a}_{G,arr} = a\vec{j}$; $\vec{a}_{G,rel} = -\Omega^2 L\vec{i}$; $\vec{a}_{G,cor} = \vec{0}$ ➔ $\boxed{\vec{a}_G = -\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}}$ **(0,5)**

TMA pólo em O: $\dot{\vec{H}}_O = m(\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O) + \vec{M}_O$

$$\vec{H}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + [J]_O\{\vec{\omega}_{abs}\} = mLv_O\vec{k} + \frac{mR^2}{2}\omega\vec{i} + \left(\frac{mR^2}{4} + mL^2\right)\Omega\vec{j}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = mLa\vec{k} + mLv_O\Omega\vec{i} - \frac{mR^2}{2}\omega\Omega\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -mgL\vec{k}$$

$$mLv_O\Omega\vec{i} + \left(mLa - \frac{mR^2}{2}\omega\Omega\right)\vec{k} = m\left[\left(v_O\vec{j} - \Omega L\vec{k}\right)\wedge v_O\vec{j}\right] + \left(-mgL\vec{k}\right)$$

resolvendo para a direção $\vec{k}$: $\boxed{\Omega = \frac{2L(g+a)}{R^2\omega}}$ **(1,0)**

TMB: $m\left(-\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}\right) = X_O\vec{i} + (Y_O - mg)\vec{j} + Z_O\vec{k}$ **(0,5)**

➔ $\boxed{X_O = -m\Omega^2 L}$ ➔ $\boxed{Y_O = m(a+g)}$ ➔ $\boxed{Z_O = 0}$

Caso em queda livre, a = -g $\Rightarrow \Omega = 0$ e assim não há precessão. **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos) Baseada no 2º Exercício computacional.

Considere o pião simétrico sujeito apenas à ação da força peso, representado na figura 3.1. O eixo fixo OZ é vertical e O é uma articulação. Nestas condições a equação diferencial que descreve o movimento do pião é,

$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\beta - \alpha\cos\theta)}{I\text{sen}^3\theta} = mgz_G\text{sen}\theta$$

onde $\alpha = K_{OZ} = I\dot{\varphi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$ e $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$, componentes do momento angular nas direções dos eixos OZ e Oz, respectivamente, são duas constantes que dependem apenas das condições iniciais do movimento; I e J são os momentos de inércia do pião em relação aos eixos y e z respectivamente.

Os valores adotados nas simulações são: $mgz_G = 0.2\ \text{Nm}; I = 1{,}0\ \text{kg m}^2; J = 2I$.

a) Esboce o diagrama SCICOS para o problema.

- A figura 3.2 mostra os gráficos das coordenadas do centro de massa do pião em função do tempo; os itens a), b) e c) referem-se a esta figura.

b) Responda e justifique: que tipo de movimento é executado pelo pião?

c) Calcule aproximadamente o valor da velocidade de precessão $\dot{\varphi}$.

d) Sabendo que no movimento descrito $\dot{\psi} > 0$, qual o sentido de $\dot{\varphi}$?

- As figuras 3.3.1 e 3.3.2 mostram os gráficos de θ e $\dot{\theta}$ em função do tempo; sabendo que os dois movimentos descritos nestas figuras têm mesmos valores iniciais de φ e $\dot{\varphi}$, responda e justifique:

e) Em qual figura é apresentado o movimento que tem o maior valor inicial de $\dot{\psi}$?

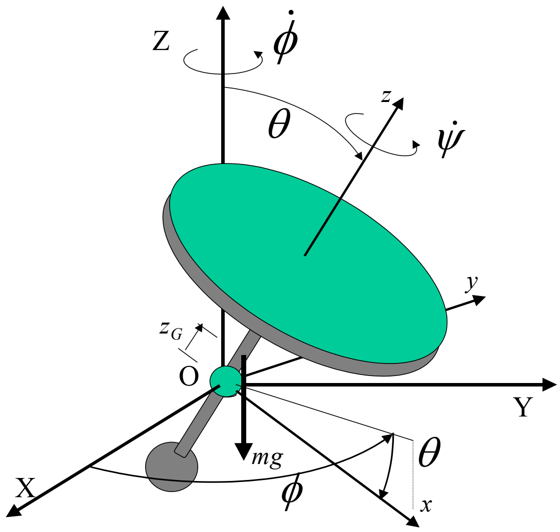


Figura 3.1

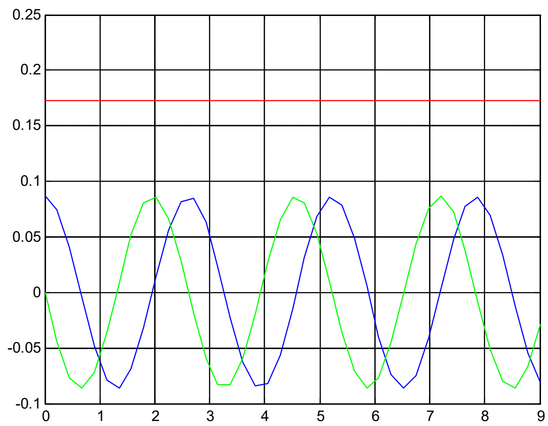


Figura 3.2

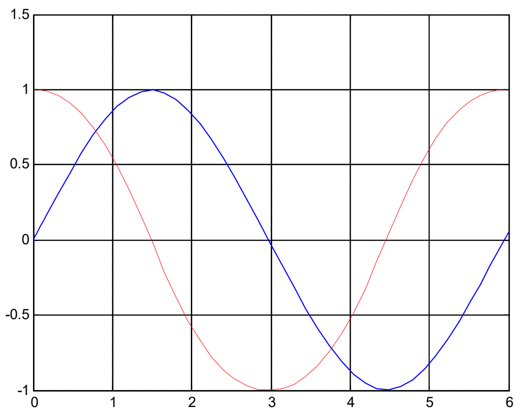


Figura 3.3.1

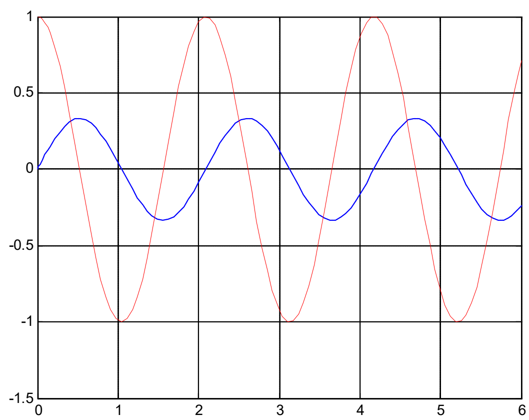
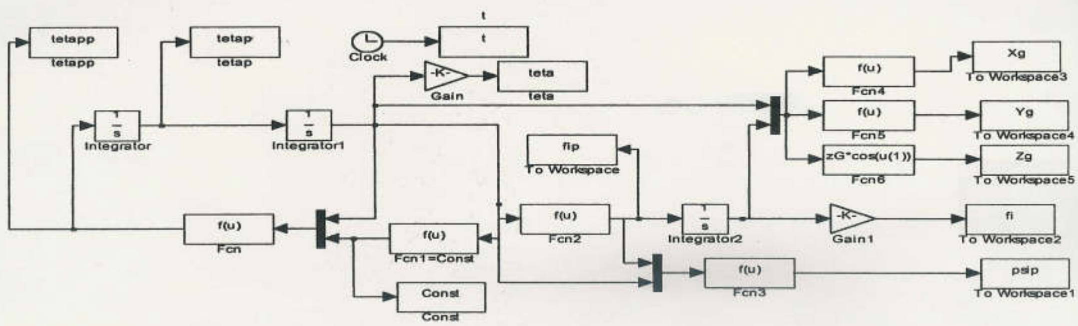


Figura 3.3.2

a) Diagrama SCICOS **(1,5)**



onde:

$K = 180/\pi$

$\alpha = K_{OZ}(0) = \left[I\dot{\phi}\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0}$

$\beta = K_{Oz}(0) = \left[J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]_{t=0}$

func == (m*g*zG*sin(u(1)) - u(2)/(I*sin(u(1))^3))/I $= \frac{1}{I}\left[mgz_G\mathrm{sen}\theta - \frac{\mathrm{Const}}{I\mathrm{sen}^3\theta}\right]$

func1 = Const $= (\alpha - \beta\cos\theta_0)(\beta - \alpha\cos\theta_0)$

func2 = (alfa - beta*cos(u(1)))/(I*sin(u(1))^2) $= (\alpha - \beta\cos\theta)/(I\mathrm{sin}^2\theta) = \dot{\phi}$

func3 = beta/J - u((1))*cos(u(2)) $= \beta/J -$ func2 $\cos\theta = \dot{\psi}$

func4 = zG*sin(u(1))*cos(u(2)) $= z_G\mathrm{sen}\theta\cos\phi = X_G$

func5 = zG*sin(u(1))*sin(u(2)) $= z_G\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi = Y_G$

func6 ≅ zG*cos(u(1)) $= z_G\cos\theta = Z_G$

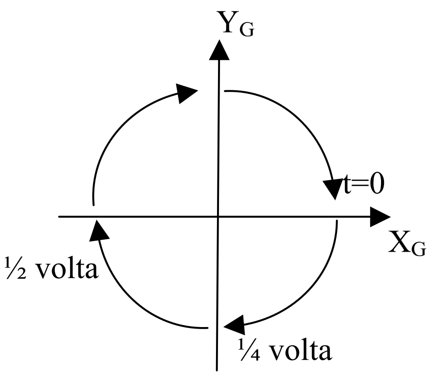
b) $Z_G = cte \rightarrow \theta = \overline{\theta} = cte \rightarrow \dot{\theta} = 0,\ \ddot{\theta} = 0;$

$\therefore \dot{\phi} = \dfrac{\alpha - \beta\cos\overline{\theta}}{I\sin^3\overline{\theta}} = cte \ e \ \dot{\psi} = \dfrac{\beta}{J} - \dot{\phi}\cos\overline{\theta} = cte.$ **(0,5)**

Logo, o pião está em precessão estacionária.

c) A partir dos gráficos de X_G ou Y_G da figura 3.2, observa-se que *G* completa 3 voltas ao redor de *Z* em aproximadamente 7.8 segundos, logo, $\dot{\phi} \approx \dfrac{3}{7.8} = 0.39\ rps$ ou $\dot{\phi} \approx 2.42\ rad/s$. **(0,5)**

d) Traçando-se o gráfico de Y_G em função de X_G, observa-se que a trajetória de *G* ao redor de *Z* é percorrida no sentido horário, logo, $\dot{\phi}$ é negativa. **(0,5)**



.

e) Os gráficos mostram que o período de nutação é menor no movimento descrito na figura 3.3.2, indicando que neste caso, a "rigidez giroscópica" é maior. Como essa "rigidez" é proporcional a $\dot{\psi}$, o maior valor inicial de $\dot{\psi}$ corresponde ao movimento descrito na figura3.3.2 . **(0,5)**