ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

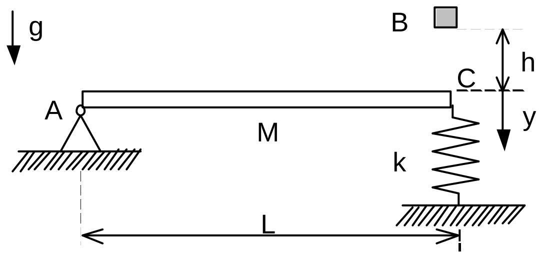
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – 13 de maio de 2003

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos)

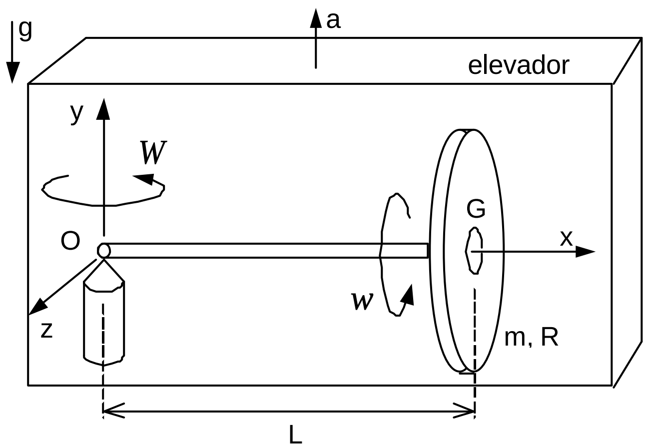
Uma barra articulada em ***A*** de massa ***M*** e comprimento ***L***, está apoiada numa mola de rigidez ***k***. Um bloco ***B*** de massa ***m***, inicialmente em repouso, cai sob ação da gravidade ***g*** de uma altura ***h*** e se choca de forma inelástica (plástica) com a barra em ***C***. Pede-se determinar:



a) a velocidade V_B do bloco antes e depois do choque;
b) máximo deslocamento y_{max} da extremidade da barra após o choque (considere $L \gg y_{max}$);
c) a energia perdida durante o choque.

2ª Questão (4,0 pontos)

No sistema da figura, o disco homogêneo (massa ***m***, raio ***R***) gira ao redor da barra **OG** (massa desprezível, comprimento ***L***) com velocidade angular constante ω; a barra **OG** mantém sempre a direção horizontal e gira com velocidade angular constante W ao redor do eixo vertical que passa pela articulação ***O***. O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante $a\vec{j}$. Usando o sistema de coordenadas (O,x,y,z) solidário à barra, pede-se:



a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de W para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de W determinado no item (b), calcule as reações na articulação ***O***;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos)

Considere o Exercício Computacional número 1, no qual é analisado o comportamento dinâmico do rotor cilíndrico mostrado na figura abaixo. (O, x, y, z) é um sistema de referências fixo, com y na vertical e x e z na horizontal. A equação que rege a dinâmica deste rotor para a condição desbalanceada e com <u>eixo na horizontal</u> é:

$$J_z \ddot{j} = t(t) - Q(t) - \overline{M} g x_G$$

e as componentes das reações aplicadas ao rotor pelos mancais, associadas às direções de (O, x, y, z), são dadas por:

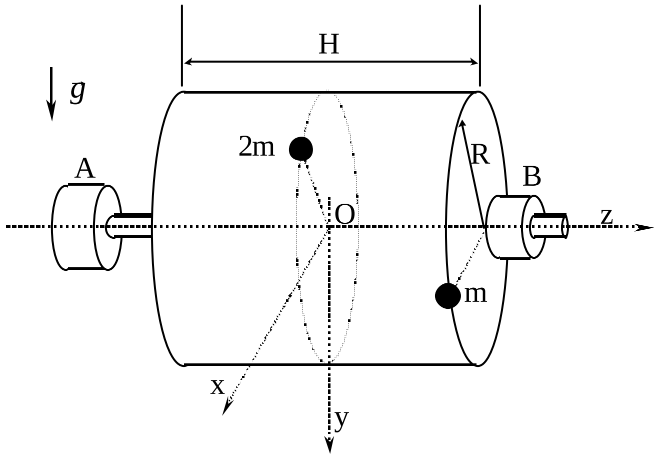
$$A_x = -\frac{1}{2}\overline{M}\left(\dot{j}^2 x_G + \ddot{j} y_G\right) + \frac{J_{XZ}}{H}\dot{j}^2$$

$$B_x = -\frac{1}{2}\overline{M}\left(\dot{j}^2 x_G + \ddot{j} y_G\right) - \frac{J_{XZ}}{H}\dot{j}^2$$

$$A_y = \frac{\overline{M}}{2}\left(\ddot{j}\; x_G - \dot{j}^2 y_G + g\right) + \frac{1}{H}\left(J_{XZ}\ddot{j} - \overline{M} g z_G\right)$$

$$B_y = \frac{\overline{M}}{2}\left(\ddot{j}\; x_G - \dot{j}^2 y_G + g\right) - \frac{1}{H}\left(J_{XZ}\ddot{j} - \overline{M} g z_G\right)$$

$$A_z = B_z = 0$$



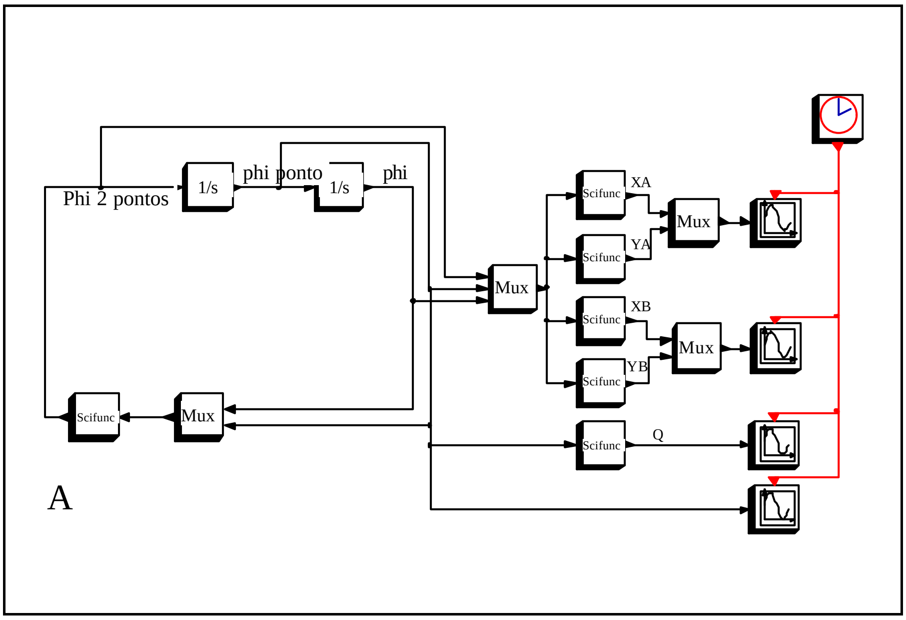
onde $\overline{M} = \left(rpR^2H\right) + 3m$ é a massa total do sistema, τ(t) é o torque aplicado, $Q(t) = C\dot{j}$ é o torque resistivo, $x_G(t) = e\cos j(t)$; $y_G(t) = e\sin j(t)$; $z_G = \frac{m}{\overline{M}}\frac{H}{2}$ são as coordenadas do baricentro do sistema, com $e = \sqrt{x_G^{\,2} + y_G^{\,2}} = \frac{m}{\overline{M}}R\sqrt{(4 - 2\sqrt{2})}$ a excentricidade, associada ao desbalanceamento. $J_{XZ} = -mRH$ é o produto de inércia com respeito a eixos solidários ao rotor (não mostrados na figura).

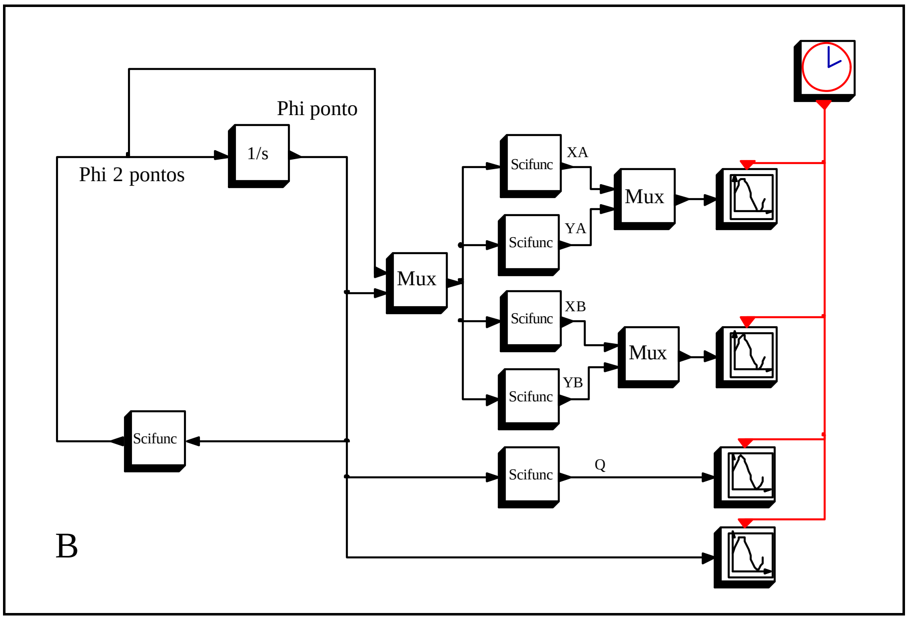
a) Dentre os diagramas A e B, qual simula a condição de rotor **<u>com eixo na horizontal</u>**? Justifique claramente.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica





As figuras abaixo mostram o registro temporal de uma simulação. A primeira apresenta $j(t)$ e $\dot{j}(t)$. A segunda mostra $A_x(t)$ e $A_y(t)$. A simulação foi realizada sob o seguinte conjunto de parâmetros:

R = 100 mm, C = 4π Nms, τ_o = 0,5 kNm, H = 500 mm, ρ = 2,7 t/m^3, m = 20 kg; g=9,8ms^{-2}
e a condição inicial de simulação é tal que $j(0) = 0$ e $\dot{j}(0) = 0$, de tal sorte que $x_G(0) = 0$

Pede-se:

b) Identifique $j(t)$ e $\dot{j}(t)$, associando os registros temporais a: (I) linha sólida, (II) linha tracejada. Justifique.

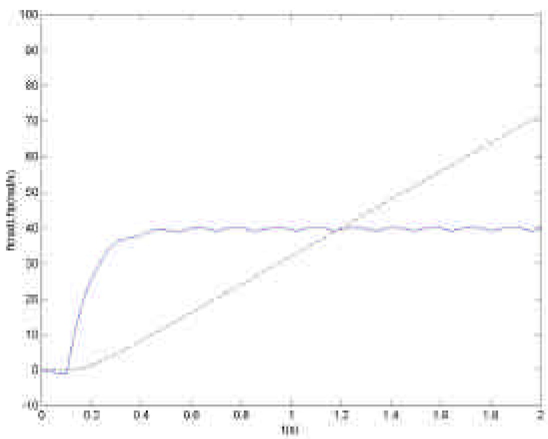


Fig. 1

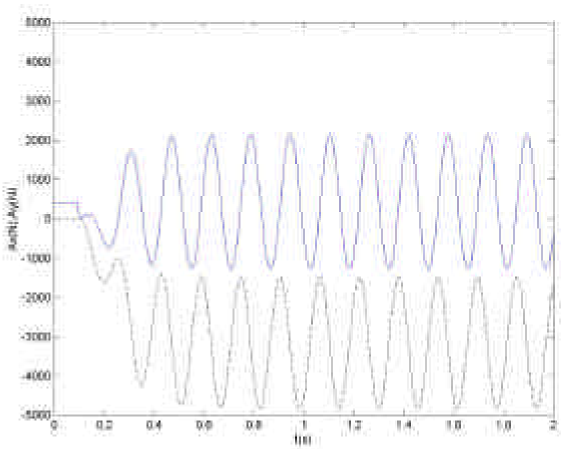


Fig. 2

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

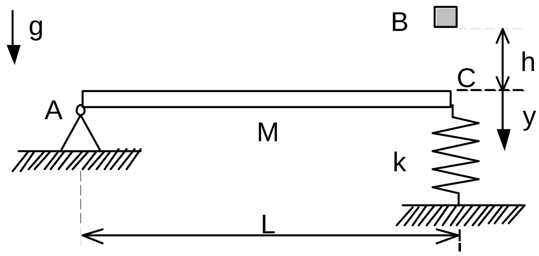
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – Resolução - 13/04/2003

1ª Questão - Resolução (3,0 pontos)

Uma barra articulada em ***A*** de massa ***M*** e comprimento ***L***, está apoiada numa mola de rigidez ***k***. Um bloco ***B*** de massa ***m***, inicialmente em repouso, cai sob ação da gravidade ***g*** de uma altura ***h*** e se choca de forma inelástica (plástica) com a barra em ***C***. Pede-se determinar:

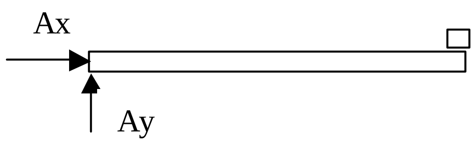


a) a velocidade V_B do bloco antes e depois do choque;
b) máximo deslocamento $\mathbf{y}_{max}$ da extremidade da barra após o choque (considere $L \gg \mathbf{y}_{max}$);
c) a energia perdida durante o choque.

Conservação da energia antes do choque: $\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$ (0,5)

Hipótese de Newton: e = 0 $\Rightarrow v'_B = v'_C = v'$

DCL do sistema barra+massa durante o choque (representadas apenas forças de natureza impulsiva):



TMI pólo em A: $\Delta\vec{H}_A = \vec{M}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_{Af} = \vec{H}_{Ai}$

$$-mv'L\,\vec{k} - \frac{ML^2}{3}\left(\frac{v'}{L}\right)\vec{k} = -mL\sqrt{2gh}\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = \frac{3m}{3m+M}\sqrt{2gh}} \quad (1{,}0)$$

TEC entre os instantes imediatamente após o choque e a máxima deformação da mola (considerando h >> $y_{máx}$)

$$t = \Delta T \qquad \frac{1}{2}ky_{máx}^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\left(\frac{v'}{L}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y_{máx} = m\sqrt{\frac{6gh}{(3m+M)k}}} \quad (1{,}0)$$

Energia perdida durante o choque:

$$E_p = mgh - \left[\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\left(\frac{v'}{L}\right)^2\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_p = \frac{mMgh}{3m+M}} \quad (0{,}5) \quad \left(\text{ou} \quad E_p = mgh - \frac{1}{2}ky_{máx}^2\right)$$

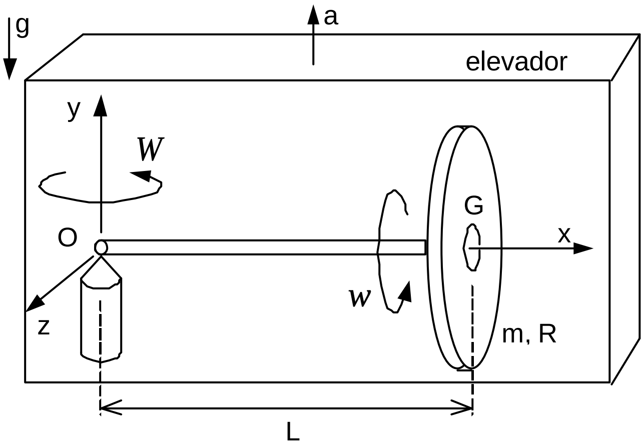
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – Resolução - 13/04/2003

2ª Questão - Resolução (4,0 pontos)



No sistema da figura, o disco homogêneo (massa ***m***, raio ***R***) gira ao redor da barra **OG** (massa desprezível, comprimento ***L***) com velocidade angular constante ω; a barra **OG** mantém sempre a direção horizontal e gira com velocidade angular constante W ao redor do eixo vertical que passa pela articulação ***O***. O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante $a\vec{j}$. Usando o sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) solidário à barra, pede-se:

a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de W para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de W determinado no item (b), calcule as reações na articulação ***O***;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?

Resolução:

$\boxed{\vec{\omega}_a = \omega\vec{i} + \Omega\vec{j}}$ $\boxed{\vec{a}_G = -\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}}$ $J_x = \dfrac{mR^2}{2}$ (1,0)

TMA pólo em O (extensão do CR):

$$\vec{H}_O = m(G-O)\wedge\vec{v}_O + J_x\omega\vec{i} + J_y\Omega\vec{j} = mLv_O\vec{k} + J_x\omega\vec{i} + J_y\Omega\vec{j}$$
$$\dot{\vec{H}}_O = mLa\vec{k} + mLv_O\Omega\vec{i} - J_x\omega\Omega\vec{k}$$
$$\vec{M}_O = -mgL\vec{k}$$
$$\dot{\vec{H}}_O = m(\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O) + \vec{M}_O \qquad \vec{v}_G = v_O\vec{i} - \Omega L\vec{k}$$
$$\Rightarrow\ mLv_O\Omega\vec{i} + (mLa - J_x\omega\Omega)\vec{k} = mLv_O\Omega\vec{i} - mgL\vec{k} \ \Rightarrow \Omega = \frac{mL(g+a)}{J_x\omega} \ \Rightarrow \ \boxed{\Omega = \frac{2L(g+a)}{\omega R^2}} \quad (2,0)$$

TMB: (0,5)

$$m(-\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}) = X_O\vec{i} + (Y_O - mg)\vec{j} + Z_O\vec{k} \ \Rightarrow \boxed{X_O = -m\Omega^2 L \ ; \quad Y_O = m(a+g) \quad ; \quad Z_O = 0}$$

Caso em queda livre, a = - g ➔ Ω = 0 e não há precessão. (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

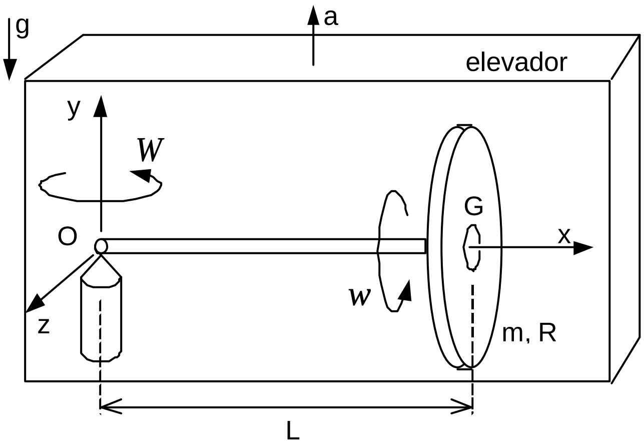
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – Resolução - 13/04/2003

2ª Questão – Resolução Alternativa - (4,0 pontos)

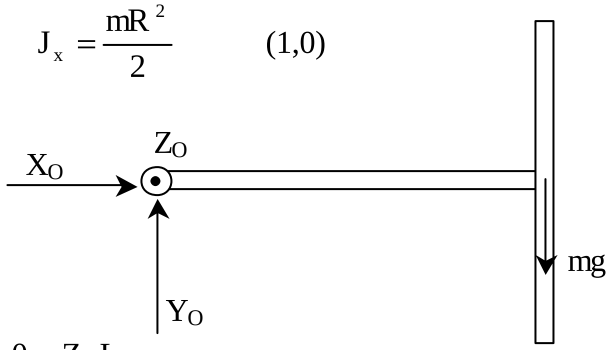
No sistema da figura, o disco homogêneo (massa ***m***, raio ***R***) gira ao redor da barra **OG** (massa desprezível, comprimento ***L***) com velocidade angular constante ω; a barra **OG** mantém sempre a direção horizontal e gira com velocidade angular constante W ao redor do eixo vertical que passa pela articulação ***O***. O conjunto está montado dentro de um elevador que sobe com aceleração constante $a\vec{j}$. Usando o sistema de coordenadas (O,*x*,*y*,*z*) solidário à barra, pede-se:



a) o vetor de rotação absoluto $\vec{\omega}_a$ do disco e a aceleração do seu baricentro;
b) o valor de W para que o movimento descrito seja possível (precessão estacionária);
c) supondo conhecido o valor de W determinado no item (b), calcule as reações na articulação ***O***;
d) responda e justifique: o movimento descrito será possível se o elevador descer em queda livre?

Resolução alternativa:

$\boxed{\vec{\omega}_a = \omega\vec{i} + \Omega\vec{j}}$ $\boxed{\vec{a}_G = -\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}}$ $J_x = \dfrac{mR^2}{2}$ (1,0)



TMA pólo em G:

$$\vec{H}_G = J_x\omega\vec{i} + J_y\Omega\vec{j}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = -J_x\omega\Omega\vec{k}$$

$$\vec{M}_G = Z_O L\vec{j} - Y_O\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G \Rightarrow -J_x\omega\Omega\vec{k} = Z_O L\vec{j} - Y_O L\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} 0 = Z_O L \\ J_x\omega\Omega = Y_O L \end{cases}$$

TMB:

$$m(-\Omega^2 L\vec{i} + a\vec{j}) = X_O\vec{i} + (Y_O - mg)\vec{j} + Z_O\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} -m\Omega^2 L = X_O \\ ma = Y_O - mg \\ 0 = Z_O \end{cases} \quad (0{,}5)$$

Resolvendo: $\boxed{X_O = -m\Omega^2 L \;;\; Y_O = m(a+g) \;;\; Z_O = 0}$ $\boxed{\Omega = \dfrac{2L(g+a)}{\omega R^2}}$ (2,0)

Caso em queda livre, a = - g ➔ Ω = 0 e não há precessão. (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2200 – MECÂNICA B – Segunda Prova – Resolução - 13/04/2003

3ª Questão - Resolução (3,0 pontos)

a) O diagrama **A** simula a condição de trabalho com o eixo do rotor na horizontal. Nesta configuração o desbalanceamento resulta em um momento de forças em relação ao eixo z do rotor, momento este que depende do ângulo $j(t)$. Portanto, um termo em $j(t)$ tem que ser considerado no bloco **Scifunc** para cálculo da aceleração $\ddot{j}(t)$, o que apenas acontece no diagrama **A**. (1,5)

(b) A linha sólida (I) corresponde a $\dot{j}(t)$ e a linha tracejada (II) corresponde a $j(t)$. Com a aplicação do torque, constante, o ângulo $j(t)$ cresce indefinidamente, enquanto que a presença do torque resistivo $Q(t)$ tende a estabilizar a rotação em torno de um valor finito. As oscilações observadas em $\dot{j}(t)$ são devidas ao desbalanceamento do rotor. (1,5)