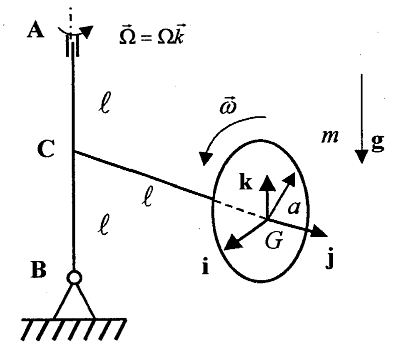
PME 2200 – MECÂNICA B – 2ª Prova – 16/5/2002 – Duração 100 minutos

(Não é permitido o uso de calculadoras).

GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos)



A estrutura *ABCG* mostrada na figura tem massa desprezível e gira em torno do eixo *AB* com velocidade angular constante Ω. *A* é um anel pequeno e *B* é uma articulação. O disco de raio *a*, centro *G* e massa *m* gira com velocidade angular constante ω em torno do eixo *CG*. Usando a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixa na *estrutura*, pede-se calcular:

a) o vetor de rotação absoluto do disco $\vec{w}_{abs}$;

b) o momento que o disco exerce na estrutura;

c) o valor da velocidade angular w do disco para que as reações em *A* sejam nulas.

Dado: $J_{Gy} = \frac{1}{2}ma^2$

$$\boxed{\vec{w}_{abs} = w\vec{j} + \Omega\vec{k}}$$

TMA no disco c/ pólo em G:

$$\vec{H}_G = J_{Gy}w\vec{j} + J_{Gz}\Omega\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = J_{Gy}w\dot{\vec{j}} = J_{Gy}w(\Omega\vec{k} \wedge \vec{j}) = -\frac{ma^2}{2}w\Omega\vec{i}$$

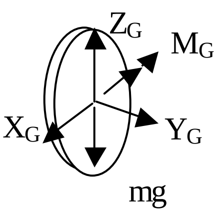
pelo TMA:

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_G = -\frac{ma^2}{2}w\Omega\vec{i}$$

que é o momento aplicado sobre o disco.
O momento aplicado pelo disco sobre a estrutura:

$$\boxed{\vec{M}_{GIR} = \frac{ma^2}{2}w\Omega\vec{i}}$$

DCL do disco:

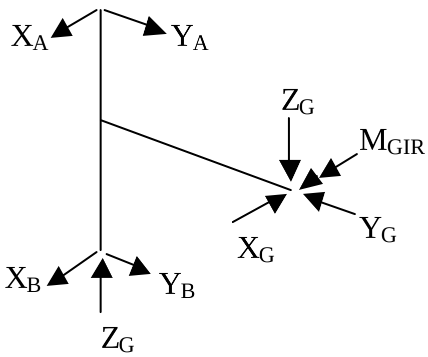


TMB no disco:

$$m\vec{a}_G = -m\Omega^2\ell\vec{j} = X_G\vec{i} + Y_G\vec{j} + (Z_G - mg)\vec{k}$$

$$\Rightarrow X_G = 0 \quad ; \quad Y_G = -m\Omega^2\ell \quad ; \quad Z_G = mg$$

DCL da estrutura:



Sendo a estrutura de massa desprezível, tem-se que o seu momento angular é sempre nulo. Pelo TMA conclui-se então:

$$\dot{\vec{H}}_B = \vec{M}_B = \vec{0}$$

Para satisfazer $X_A = Y_A = 0$, e sendo $X_G = 0$,

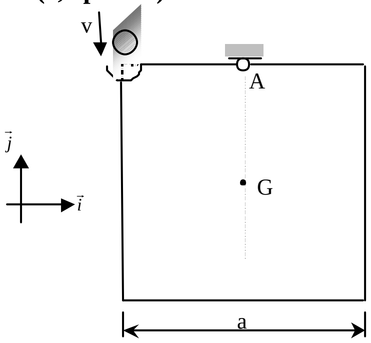
$$(Y_G\ell - Z_G\ell + M_{GIR})\vec{i} = \vec{0}$$

substituindo Y_G, Z_G e M_{GIR},

$$-m\Omega^2\ell^2 - mg\ell + \frac{ma^2}{2}w\Omega = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{w = \frac{2\ell}{a^2\Omega}\left(g + \Omega^2\ell\right)}$$

2ª Questão (3,5 pontos)



A placa quadrada de lado a e massa m encontra-se suspensa pela articulação em A e em repouso. Uma pequena esfera de massa $m/12$, com velocidade v, é colhida pelo copo, preso à placa, conforme a figura. Supondo colisão perfeitamente anelástica e desprezando-se as forças de natureza não impulsiva, pedem-se:

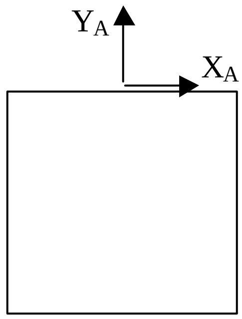
a) a velocidade angular da placa w' imediatamente após o impacto;

b) o vetor velocidade do baricentro da placa $\vec{v}_G$ logo após o impacto;

c) o impulso reativo $\vec{I}$ na articulação.

Dado: $J_{Gz} = \frac{1}{6}ma^2$ (Momento de inércia da placa, antes da colisão)

DCL do sistema placa + esfera durante o impacto, desprezando-se forças de natureza não impulsiva:



TMA no sistema com pólo em A durante o intervalo de tempo de duração do choque:

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A$$

sendo que $\vec{M}_A = \vec{0}$, logo $\dot{\vec{H}}_A = \vec{0}$ que integrado no tempo resulta em:

$$\vec{H}_{Ainicial} = \vec{H}_{Afinal}$$

$$\frac{m}{12}(C-A)\wedge(-v\vec{j}) = \frac{m}{12}(C-A)\wedge(-v'\vec{j}) + J_{zA}w'\vec{k}$$

sendo $v' = w'\frac{a}{2}$, $(C-A) = -\frac{a}{2}\vec{i}$, tem-se

$$\frac{mav}{24}\vec{k} = \frac{ma^2w'}{48}\vec{k} + J_{zA}w'\vec{k}$$

sendo $J_{zA} = J_{zG} + m\frac{a^2}{4} = \frac{5ma^2}{12}$

resulta em :

$$\boxed{w' = \frac{2v}{21a}}$$

É imediato que $v'_G = w'\frac{a}{2}$, portanto:

$$\boxed{\vec{v}'_G = \frac{v}{21}\vec{i}}$$

Pelo teorema do impulso:

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q}$$

$$\vec{I} = m\frac{v}{21}\vec{i} + \left(-\frac{m}{12}\frac{v}{21}\vec{j}\right) - \left(-\frac{m}{12}v\vec{j}\right)$$

sendo o primeiro termo a quantidade de movimento final da placa, o segundo termo a quantidade de movimento final da esfera e o terceiro termo a quantidade de movimento inicial da esfera (a quantidade de movimento inicial da placa é nula).

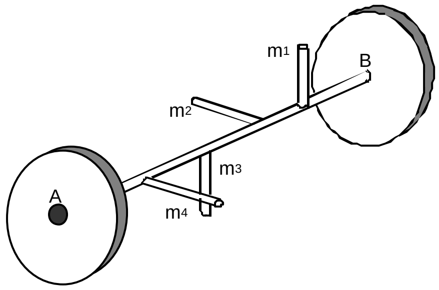
Resulta em:

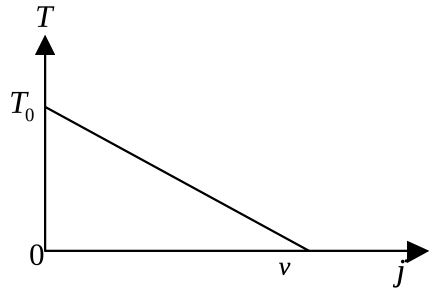
$$\boxed{\vec{I} = mv\left(\frac{1}{21}\vec{i} + \frac{5}{63}\vec{j}\right)}$$

3ª Questão (3,5 pontos) (baseada no EP)

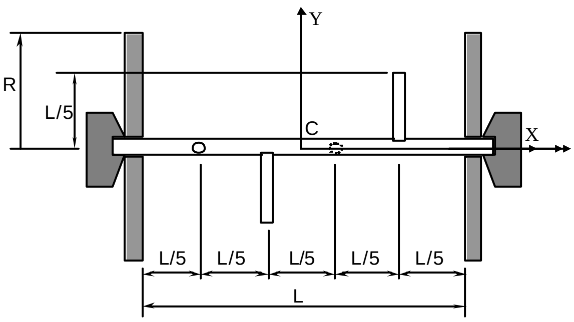
A figura abaixo à esquerda mostra um misturador com quatro pás montadas sobre um eixo em cujas extremidades estão fixados os volantes A e B indicados. As pás têm dimensões praticamente idênticas e são representadas por barras homogêneas de massas m_1, m_2, m_3 e m_4; os volantes são homogêneos e têm massa M e raio R. O eixo do misturador tem massa m_e.

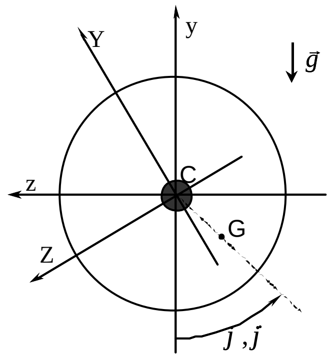
O misturador é acionado por um motor elétrico que aplica um torque variável com a rotação do equipamento, conforme mostrado no gráfico abaixo, à direita.





Considere os dois sistemas de coordenadas indicados nas figuras abaixo: (C, X, Y, Z) solidário ao misturador, e o sistema (C, x, y, z) associado a um referencial inercial. O vetor $(G-C)$ é dado por $(G-C) = X_G\vec{i} - u\cos\varphi\,\vec{j} - u\sin\varphi\,\vec{k}$, onde $u = \sqrt{Y_G^2 + Z_G^2}$ é o desbalanceamento estático do misturador.



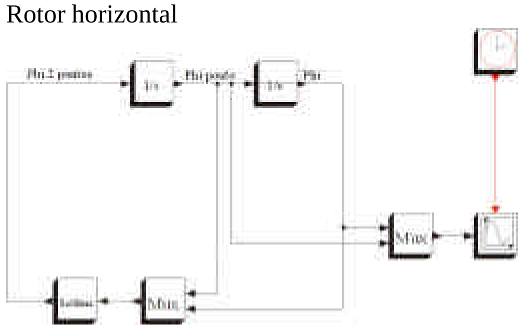


Pede-se:

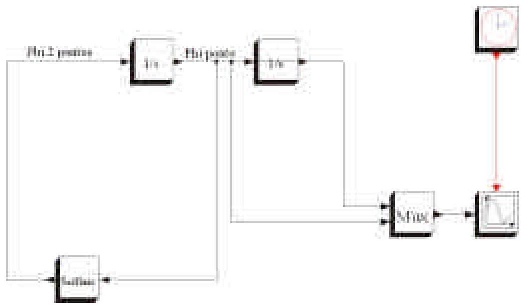
a) Escreva as equações diferenciais que descrevem o movimento do misturador sob a ação do motor elétrico e dos demais esforços atuantes, tanto para o misturador na vertical quanto na horizontal, e desenhe os diagramas de blocos correspondentes.

Resposta: A eq. dif. Do rotor horizontal é: $J_{x_C}\ddot{\varphi} + \frac{T_0}{\omega}\dot{\varphi} - T_0 + M_t g u \sin\varphi = 0$; para o rotor na vertical, basta considerar $u=0$; Os diagramas de blocos são:

Rotor horizontal

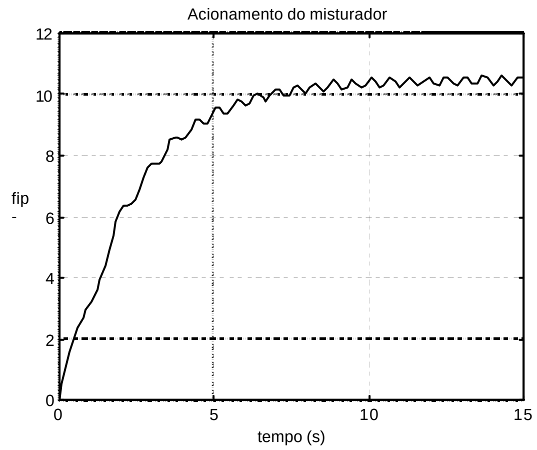


Rotor vertical

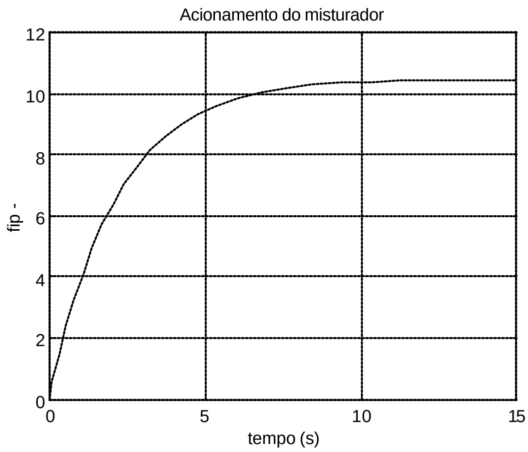


b) Reproduza qualitativamente os gráficos de $\dot{j}$ em função do tempo correspondentes ao movimento do misturador acionado pelo motor elétrico, considerando o rotor na vertical e na horizontal; faça os dois gráficos em um mesmo sistema de eixos e interprete o aspecto das curvas.

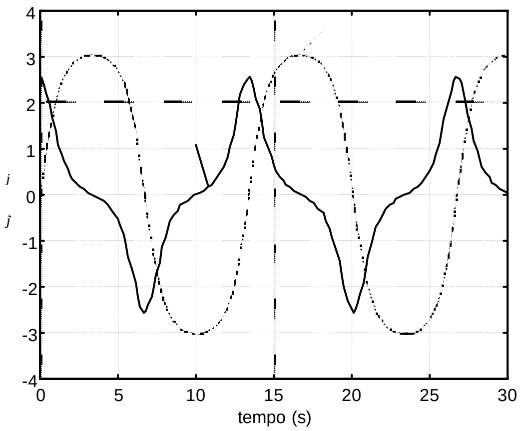
Resolução: O gráfico abaixo mostra a velocidade angular do rotor horizontal; as flutuações no valor de $\dot{j}$ são devidas ao momento decorrente do desbalanceamento estático. O gráfico para o rotor vertical é análogo, mas sem as flutuações no valor de $\dot{j}$, conforme mostrado na figura seguinte.



rotor na vertical

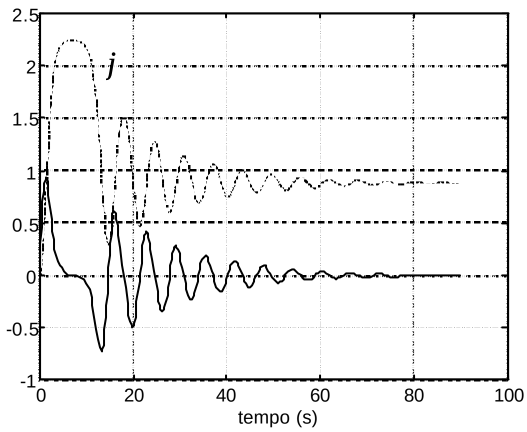


c) Os gráficos de j e $\dot{j}$ abaixo correspondem a uma das situações simuladas durante a resolução do Exercício Programa; analise as curvas e identifique qual é a situação considerada, justificando a resposta.



Resolução: Verifica-se que $j(0)=0$ e $\dot{j}(0)\neq 0$, e que j aumenta até atingir um valor máximo inferior a p; nesse instante, $\dot{j}$ é nulo e passa a ter sinal negativo, indicando que houve inversão no sentido do movimento. Os gráficos mostram que esse movimento é periódico, e corresponde à situação em que o rotor, estando na horizontal e sem a ação do torque do motor elétrico, é posto em movimento com uma velocidade angular $\dot{j}(0)$ insuficiente para que o rotor complete uma volta, de modo que o misturador oscila como um pêndulo composto.

d) Os gráficos abaixo correspondem a uma das situações simuladas durante a resolução do Exercício Programa; analise as curvas e identifique qual é a situação considerada. Justifique a resposta e interprete o significado físico de j e $\dot{j}$ quando *t* tende a infinito.



Resolução: Os gráficos mostram que $j(0)=0$ e $\dot{j}(0)=0$, e que o valor de j aumenta até atingir um valor máximo inferior a p, a partir do qual ocorre inversão no sentido do movimento. Como $\dot{j}(0)=0$, há acionamento por parte do motor, e a situação apresentada corresponde ao caso em que o torque é insuficiente para que o rotor complete a primeira volta, embora seja suficiente para imprimir uma certa rotação ao equipamento. Os gráficos mostram que nesse caso o rotor tende a uma posição de equilíbrio estático, na qual o torque acionador tem o mesmo valor do momento decorrente do desbalanceamento estático do rotor; o ângulo de equilíbrio j_{stat} é dado por $\sin j_{stat} = T_0 / M_t g u$.