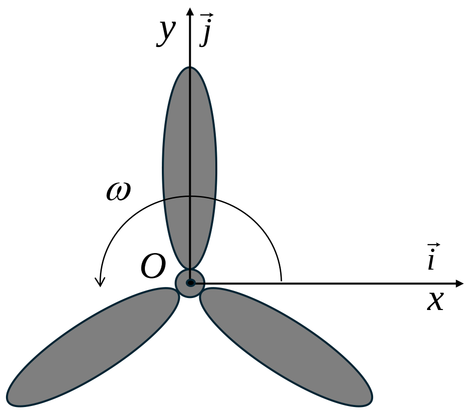
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II - PME 3200 – Primeira Prova– 9 de abril de 2024

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)



1ª Questão – (3,5 pontos). O rotor do ventilador de eixo horizontal fixo, ilustrado ao lado, está desbalanceado. O rotor (pás e cubo) tem massa *m*. O rotor é mantido sob rotação constante, de intensidade ω, conforme indicado na figura. Um sensor de carga acoplado ao eixo do rotor acusa reação e momento dinâmicos reativos (*aplicados ao rotor*) $\vec{R} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}$ e $\vec{M}_O = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath}$. Das reações já estão descontados os efeitos da força peso.
Considere a matriz de inércia do rotor, $\boldsymbol{J}$, medida com respeito ao sistema de coordenadas $Oxyz$, orientado pela base canônica $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e solidário ao rotor. Pede-se:

a) Escrever o vetor rotação do rotor na base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
b) Escrever a quantidade de movimento angular do rotor, $\vec{H}_O$, em relação ao polo O, na mesma base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e em função dos seus momentos e produtos de inércia.
c) Aplicando o teorema da resultante, determinar as coordenadas (x_G, y_G) do centro de massa G do rotor.
d) Aplicando o teorema da quantidade de movimento angular, determinar os produtos de inércia do rotor que envolvem o eixo de rotação *Oz*.

Resolução

a) Escrever o vetor rotação do rotor na base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} \qquad (0,5)$$

b) Escrever a quantidade de movimento angular do rotor, $\vec{H}_O$, em relação ao polo O, na mesma base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ e em função dos seus momentos e produtos de inércia.

Definindo a matriz de inércia, na forma:

$$\boldsymbol{J}_O = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

a quantidade de momento angular em relação a *O,* considerado ponto fixo, fica:

$$\vec{H}_O = J_{xz}\omega\vec{\imath} + J_{yz}\omega\vec{\jmath} + J_{zz}\omega\vec{k} \qquad (0,5)$$

c) Aplicando o teorema da resultante, determinar as coordenadas (x_G, y_G), do centro de massa G do rotor.

TR: $m\vec{a}_G = \vec{R} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}$

E, como a rotação é mantida constante,

$\vec{a}_G = -\omega^2 x_G\vec{\imath} - \omega^2 y_G\vec{\jmath}$ (0,5)

Assim,

$x_G = -\dfrac{F_x}{m\omega^2}$ e $y_G = -\dfrac{F_y}{m\omega^2}$ (0,5)

d) Aplicando o teorema da quantidade de movimento angular, determinar os produtos de inércia do rotor que envolvem o eixo de rotação *Oz*.

TQMA, polo *O*: $\frac{d}{dt}(\vec{H}_O) = \dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O$ (0,5)

Mas:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_O &= J_{xz}\omega\dot{\vec{i}} + J_{yz}\omega\dot{\vec{j}} + J_{zz}\omega\dot{\vec{k}} = \\ &= J_{xz}\omega(\omega\vec{k}\wedge\vec{i}) + J_{yz}\omega(\omega\vec{k}\wedge\vec{j}) + J_{zz}\omega(\omega\vec{k}\wedge\vec{k}) = \\ &= J_{xz}\omega^2\vec{j} - J_{yz}\omega^2\vec{i}\end{aligned}$$

(0,5)

Então:

$-J_{yz}\omega^2\vec{\imath} + J_{xz}\omega^2\vec{\jmath} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath}$

Portanto,

$J_{xz} = \dfrac{M_y}{\omega^2}$ e $J_{yz} = -\dfrac{M_x}{\omega^2}$ (0,5)

OBS: Se a matriz de inércia tivesse sido definida na forma:

$$\boldsymbol{J_O} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

os sinais algébricos da solução acima se inverteriam, obviamente.

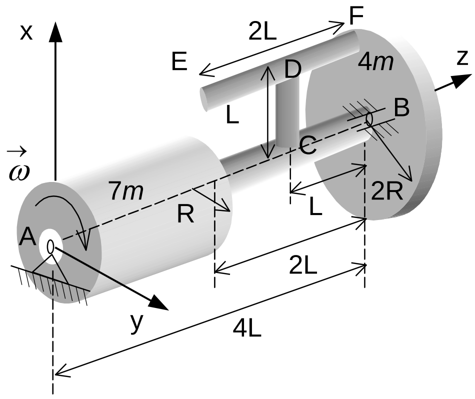
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP

Tel. 55-11 30915337

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos). O rotor ilustrado na figura ao lado é composto por um cilindro de raio ***R*** e massa 7***m*** e um disco de raio 2***R*** e massa 4***m***, fixados em cada extremidade do eixo esbelto de massa desprezível que é apoiado na articulação ***A*** e no anel ***B***. O rotor possui ainda uma haste ***CDEF*** no formato ***T***, composta por um segmento reto esbelto ***CD***, alinhado com o eixo ***x*** de comprimento ***L*** e massa ***m*** e outro segmento esbelto ***DEF***, alinhado com o eixo ***z*** de comprimento 2***L*** e massa 2***m***. O sistema gira em torno do eixo ***z*** com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante. Considerando o referencial ***Axyz*** solidário ao corpo, pede-se:



a) Determinar a posição do centro de massa no conjunto;

b) Determinar os produtos de inércia do conjunto;

c) Determinar apenas o momento de inércia J_{Az};

d) Determinar a posição e valores de duas massas utilizadas para balancear o conjunto, instaladas na periferia do cilindro e do disco nos planos de correção ***Axy*** e ***Bxy***, respectivamente.

RESOLUÇÃO

a) Determinar a posição do centro de massa do conjunto

Para a determinação da posição do centro de massa utiliza-se: $(G - A) = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$ para o rotor com massa total M = 14m:

$$x_G = \frac{m \cdot L/2 + 2m \cdot L}{14m} = \frac{5}{28}L$$

$$y_G = 0$$

$$z_G = \frac{7m \cdot L + m \cdot 3L + 2m \cdot 3L + 4m \cdot 4L}{14m} = \frac{16}{7}L$$

$$G = (5/28, 0, 16/7)L$$

(0,5)

b) Determinar os produtos de inércia do conjunto.

Para a determinação dos produtos de inércia considera-se as hastes esbeltas e pólo ***A***:

$$J_{Axz} = m(3L)(L/2) + 2m(3L)(L) = \frac{15}{2}mL^2$$

$$J_{Axy} = 0$$

$$J_{Ayz} = 0$$

(0,5)

c) Determinar apenas o momento de inércia J_{Az}.

Determinação do momento de inércia J_{Az} considerando eixo e hastes esbeltas:

$$J_{Az} = \frac{1}{2}7m \cdot R^2 + \frac{1}{2}4m \cdot (2R)^2 + \frac{1}{3}mL^2 + 2m \cdot L^2 = m\left(\frac{23}{2}R^2 + \frac{7}{3}L^2\right) \qquad (0,5)$$

d) Determinar a posição e valores de duas massas utilizadas para balancear o conjunto, instaladas na periferia do cilindro e do disco nos planos de correção *Axy* e *Bxy*, respectivamente.

Para o balanceamento é necessário atender as equações de balanceamento eliminando a excentricidade ($x_G^* = 0$) e assimetria ($J_{xz}^* = 0$) utilizando duas massas compensadoras m_1 e m_2 fixadas na parte externa do cilindro (distância ***R*** do eixo) e na parte externa do disco (distância 2***R*** do eixo) suficientes para balancear o sistema:

$$Mx_G + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$$

$$My_G + m_1y_1 + m_2y_2 = 0$$

$$\bar{J}_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0$$

$$\bar{J}_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0$$

Como o centro de massa está na parte superior, uma **possível solução** é instalar as massas na parte inferior do cilindro e do disco ($x_1 = -R$ e $x_2 = -2R$). Para não causar assimetria no plano **Axy** ($y_1 = y_2 = 0$ para manter $J_{xy} = 0$) a localização de cada massa será então: $m_1\ (-R, 0, 0)$; $m_2\ (-2R, 0, 4L)$. Os valores das massas resultam em:

$$Mx_G + m_1x_1 + m_2x_2 = 0$$

$$My_G + m_1y_1 + m_2y_2 = 0$$

$$\bar{J}_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0$$

$$\bar{J}_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0$$

Logo,

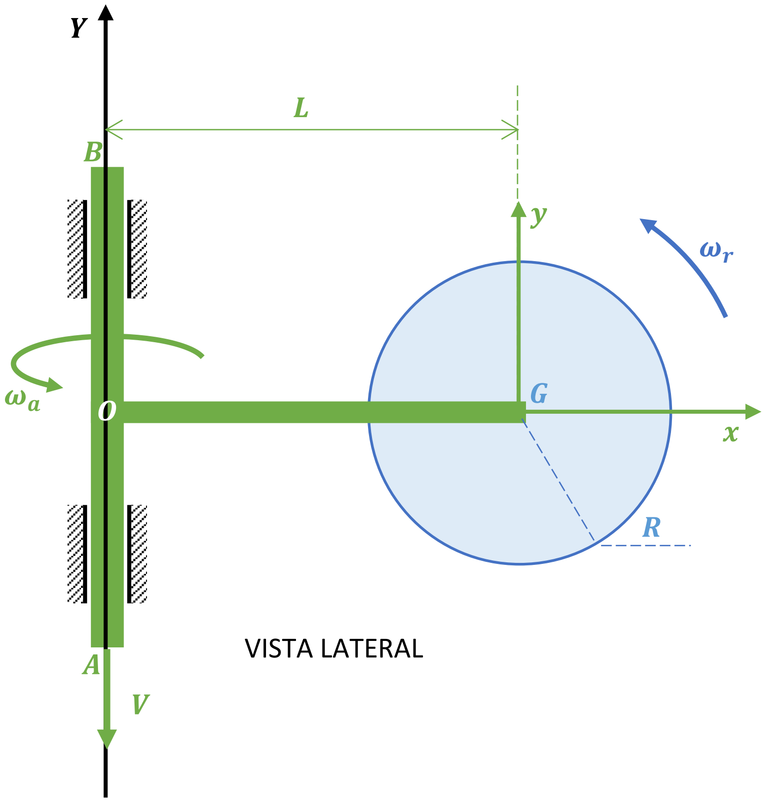
$$J_{xz} + m_1(-R)(0) + m_2(-2R)(4L) = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{15}{16}\frac{mL}{R} \quad \text{em } (-2R, 0{,}4L) \qquad (1,0)$$

$$Mx_G + m_1(-R) + m_2(-2R) = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{5}{8}\frac{mL}{R} \quad \text{em } (-R, 0{,}0) \qquad (1,0)$$

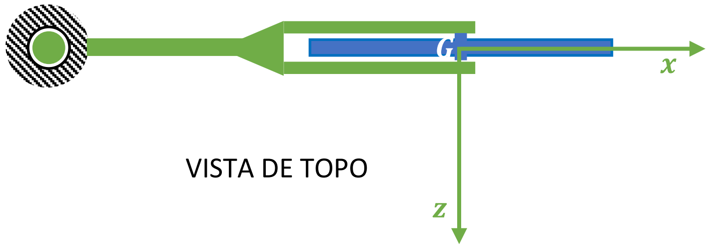
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos). O suporte $ABOG$ translada-se com velocidade constante $-V\vec{j}$ ao longo da direção vertical, ao mesmo tempo em que gira com velocidade angular constante $\omega_a\vec{j}$ em torno do eixo vertical fixo OY. Em sua extremidade G liga-se, por meio de um pino, um disco homogêneo de massa M e raio R, o qual gira com velocidade angular $\omega_r\vec{k}$ (ω_r constante) em relação ao suporte. Adotando como referencial móvel o sistema de eixos $Gxyz$ ligados ao suporte e a respectiva base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, pede-se determinar:



VISTA LATERAL



VISTA DE TOPO

a) o vetor rotação absoluta do disco;

b) a matriz de inércia do disco no polo G;

c) a quantidade de movimento angular do disco no polo G;

d) os esforços aplicados pelo disco ao garfo.

RESOLUÇÃO

(a) Vetor rotação absoluta do disco

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r = \omega_a\vec{j} + \omega_r\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

(b) Matriz de inércia no polo G

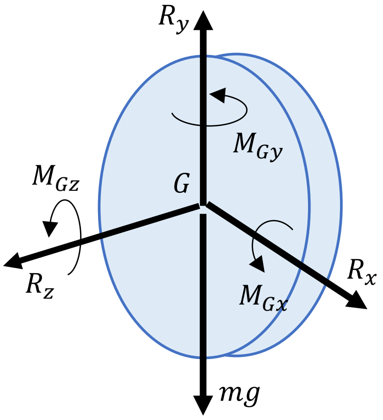
$$[J_G] = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} \qquad (0{,}5)$$

(c) Quantidade de movimento angular no polo G

$$\vec{H}_G = [J_G]\cdot[\omega] = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_a \\ \omega_r \end{bmatrix} = \frac{MR^2}{4}\omega_a\vec{j} + \frac{MR^2}{2}\omega_r\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

(d) Esforços aplicados pelo disco ao garfo

Considerando-se o diagrama de corpo livre ilustrado abaixo, o Teorema da Resultante se expressa como:



$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} - Mg\vec{j} = M\vec{a}_G$$

em que

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\omega}_a\vec{k}\wedge(G-O) + \omega_a\vec{k}\wedge\left[\omega_a\vec{k}\wedge(G-O)\right]$$

Como $\vec{v}_O = -V\vec{j} = const$ e $\omega_a = const$, resulta:

$$\vec{a}_G = \omega_a\vec{k}\wedge\left[\omega_a\vec{k}\wedge L\vec{i}\right] = -\omega_a^2 L\vec{i}$$

Substituindo-se essa expressão na expressão do Teorema da Resultante, obtêm-se:

$$R_x = -M\omega_a^2 L$$
$$R_y = Mg$$
$$R_z = 0$$

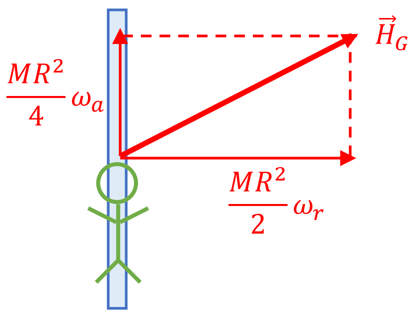
Logo, a força reativa aplicada pelo disco ao garfo é:

$$\vec{R}_G = M\omega_a^2 L\vec{i} - Mg\vec{j} \qquad (0{,}5)$$

Sendo o disco um sólido homogêneo de revolução, o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, em G, assim se expressa:

$$\vec{M}_G = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{H}_G}{dt}\right|_{Gxyz} + \omega_a\vec{j}\wedge\vec{H}_G$$

Notando que, para um observador ligado ao referencial $Gxyz$, $\vec{H}_G$ é constante (vide Figura ao lado), a expressão anterior se simplifica e o binário giroscópico aplicado pelo garfo ao disco se calcula como:



$$\vec{M}_G = \omega_a\vec{j}\wedge\vec{H}_G = \omega_a\vec{j}\wedge\left(\frac{MR^2}{4}\omega_a\vec{j} + \frac{MR^2}{2}\omega_r\vec{k}\right) = \frac{MR^2}{2}\omega_a\omega_r\vec{i}$$

Logo, o momento giroscópico reativo (ou seja, aplicado pelo disco ao garfo) é:

$$\vec{M}_G^{Reativo} = -\frac{MR^2}{2}\omega_a\omega_r\vec{i} \qquad (1{,}0)$$