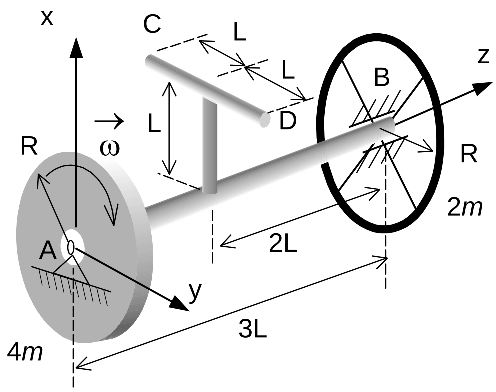
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II - PME 3200 – Primeira Prova– 16 de Maio de 2023

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

1ª Questão (3,5 pontos). O eixo esbelto de massa $3m$ e comprimento $3L$ é apoiado na articulação *A* e no anel *B*, conforme mostrado na figura ao lado. O eixo possui um disco na extremidade *A* com raio *R* e massa $4m$ e um anel esbelto na extremidade *B* com raio *R* e massa $2m$. O eixo possui ainda uma haste no formato *T* formada por um segmento reto de comprimento *L* e massa *m* e outro segmento *CD* alinhado com o eixo ***y*** de comprimento $2L$ e massa $2m$, ambos esbeltos. Considerando que a peça rígida gira em torno do eixo *z* com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante e adotando-se o referencial ***Axyz*** solidário à peça, pede-se:



(a) Determinar a posição do centro de massa da peça;
(b) Calcular a matriz de inércia da peça;
(c) Fazer o diagrama de corpo livre para a peça;
(d) Calcular a aceleração do centro de massa e a quantidade de movimento angular em relação ao polo *A*;
(e) Formular a expressão do momento de todas as forças externas e determinar as reações (dinâmicas+estáticas) dos mancais sobre a peça.

RESOLUÇÃO DETALHADA

a) Determinar a posição do centro de massa

A posição do centro de massa do conjunto, ou seja,

$$(G - A) = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$$

é calculada compondo-se os centros de massa do disco *A*, do eixo, da barra vertical, da barra horizontal e do anel *B*, nesta ordem

Sendo $M = 12m$ a massa do conjunto, tem-se:

$$x_G = \frac{m\frac{L}{2} + 2mL}{12m} = \frac{5}{24}L$$

$$y_G = 0$$

$$z_G = \frac{4m \cdot 0 + 3m\frac{3L}{2} + m \cdot L + 2m \cdot L + 2m \cdot 3L}{12m} = \frac{27}{24}L$$

Logo, resulta:

$$G = \left(\frac{5}{24}L, 0, \frac{27}{24}L\right) \qquad \mathbf{(0,5)}$$

b) Calcular a matriz de inércia do conjunto em relação ao polo A

Os momentos de inércia relativos aos eixos Ax, Ay e Az são dados, respectivamente, por:

$$J_{Ax} = \frac{4m\cdot R^2}{4} + \frac{3m\cdot(3L)^2}{3} + m\cdot L^2 + \left[\frac{2m\cdot(2L)^2}{12} + 2m\cdot L^2\right] + \left[\frac{2m\cdot R^2}{2} + 2m\cdot(3L)^2\right] = m\left(2R^2 + \frac{92}{3}L^2\right)$$

$$J_{Ay} = \frac{4m\cdot R^2}{4} + \frac{3m\cdot(3L)^2}{3} + \left\{\frac{m\cdot L^2}{12} + m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2\right]\right\} + 2m\cdot(L^2+L^2) + \left[\frac{2m\cdot R^2}{2} + 2m\cdot(3L)^2\right]$$

$$\Rightarrow J_{Ay} = m\left(2R^2 + \frac{97}{3}L^2\right)$$

$$J_{Az} = \frac{4m\cdot R^2}{2} + 0 + \frac{m\cdot L^2}{3} + \left[\frac{2m(2L)^2}{12} + 2mL^2\right] + 2mR^2 = m(4R^2 + 3L^2)$$

Os produtos de inércia relativos aos eixos Ax, Ay e Az , são:

$$J_{Axz} = 0 + 0 + m\frac{L}{2}L + 2m\cdot L\cdot L + 0 = \frac{5mL^2}{2}$$

$$J_{Axy} = 0$$

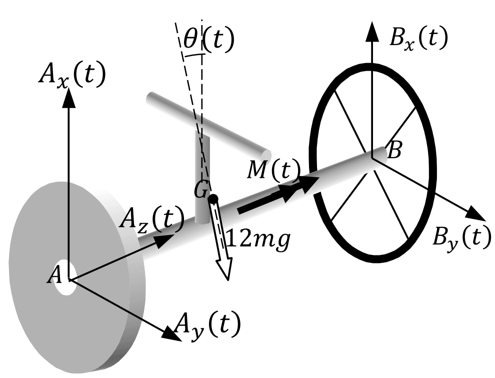
$$J_{Ayz} = 0$$

Logo, a matriz de inércia do conjunto, relativamente ao polo A, é:

$$[J_A] = \begin{bmatrix} J_{Ax} & -J_{Axy} & -J_{Axz} \\ -J_{Axy} & J_{Ay} & -J_{Ayz} \\ -J_{Axz} & -J_{Ayz} & J_{Az} \end{bmatrix} = m\cdot\begin{bmatrix} \left(2R^2 + \frac{92}{3}L^2\right) & 0 & -\frac{5L^2}{2} \\ 0 & \left(2R^2 + \frac{97}{3}L^2\right) & 0 \\ -\frac{5L^2}{2} & 0 & (4R^2 + 3L^2) \end{bmatrix}$$ **(0,5)**

c) Diagrama de corpo livre

Na figura ao lado desenha-se o diagrama de corpo livre para o instante t genérico em que o eixo Ax forma um ângulo θ com a vertical.



(0,5)

d) Aceleração do centro de massa

É obtida a partir da fórmula de campo de acelerações, tomando-se o polo A fixo ($\vec{a}_A = 0$), lembrando que a velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ é constante (logo, $\dot{\vec{\omega}} = 0$) e que $(G - A) = (5L/24, 0, 27L/24)$.

Assim, tem-se:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (G - A) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(\frac{5}{24}L\vec{\imath} + \frac{27}{24}L\vec{k}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = -\omega^2\frac{5L}{24}\vec{\imath} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

A quantidade de movimento angular $\vec{H}_A$ em relação ao polo A é:

$$\vec{H}_A = [J_A]\{\omega\} = \begin{bmatrix} J_{Ax} & -J_{Axy} & -J_{Axz} \\ -J_{Axy} & J_{Ay} & -J_{Ayz} \\ -J_{Axz} & -J_{Ayz} & J_{Az} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_A = m\begin{bmatrix} \left(2R^2 + \frac{92}{3}L^2\right) & 0 & -\frac{5}{2}L^2 \\ 0 & \left(2R^2 + \frac{97}{3}L^2\right) & 0 \\ -\frac{5}{2}L^2 & 0 & (4R^2 + 3L^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = -\frac{5}{2}mL^2\omega\vec{\imath} + m(4R^2 + 3L^2)\omega\vec{k} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

e) Formular a expressão do momento de todas as forças externas e determinar as reações (dinâmicas + estáticas) dos mancais sobre a peça

Aplicando-se o Teorema da Resultante obtém-se:

$$\begin{cases} -m\omega^2\frac{5L}{2} = A_x(t) + B_x(t) - 12mg\cos\theta(t) \\ 0 = A_y(t) + B_y(t) + 12mg\sin\theta(t) \\ 0 = A_z(t) \end{cases} \qquad (1)$$

$\mathbf{(0,5)}$

Aplicando-se o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, com polo em A, tem-se:

$$\vec{M}_A = (G - A) \wedge 12m\vec{a}_A + [J_A] \cdot [\dot{\omega}] + \vec{\omega} \wedge \{[J_A] \cdot [\omega]\} \qquad (2)$$

Como $\dot{\omega} = 0$ e $\vec{a}_A = \vec{0}$, resulta:

$$\vec{M}_A = \omega\vec{k} \wedge \left\{-\frac{5}{2}mL^2\omega\vec{\imath} + m(4R^2 + 3L^2)\omega\vec{k}\right\} = -\frac{5}{2}mL^2\omega^2\vec{\jmath} \qquad (3)$$

O momento das forças externas no polo A é:

$$\vec{M}_A = \vec{M}(t) + (A - A) \wedge \vec{R}_A + (B - A) \wedge \vec{R}_B + (G - A) \wedge [-12mg(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})]$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A = M(t)\vec{k} + \vec{0} + 3L\vec{k} \wedge \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}\right) - \left(\frac{5}{24}\vec{\imath} + \frac{27}{24}\vec{k}\right) L \wedge 12mg(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A = M(t)\vec{k} + 3LB_x\vec{\jmath} - 3LB_y\vec{\imath} + mg\frac{5}{2}L\sin\theta\,\vec{k} - mg\frac{27}{2}L\cos\theta\,\vec{\jmath} - mg\frac{27}{2}L\sin\theta\,\vec{\imath}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A = \left[-3B_y(t) - mg\frac{27}{2}\sin\theta\,(t)\right]L\vec{\imath} + \left[3B_x(t) - mg\frac{27}{2}\cos\theta\,(t)\right]L\vec{\jmath} + \left[M(t) - mg\frac{5}{2}L\sin\theta(t)\,\vec{k}\right] \tag{4}$$

Das equações (3) e (4), resulta:

$$-\frac{5}{2}mL^2\omega^2\vec{\jmath} = \left[-3B_y(t) - mg\frac{27}{2}\sin\theta\,(t)\right]L\vec{\imath} + \left[3B_x(t) - mg\frac{27}{2}\cos\theta\,(t)\right]L\vec{\jmath} + \left[M(t) - mg\frac{5}{2}L\sin\theta(t)\,\vec{k}\right]$$

Decompondo-se a equação vetorial acima em suas componentes escalares, obtém-se:

$$\begin{cases} -3B_y(t) - mg\dfrac{27}{2}\sin\theta\,(t) = 0 \\ 3B_x(t) - mg\dfrac{27}{2}\cos\theta\,(t) = -\dfrac{5}{2}mL^2\omega^2 \\ M(t) - mg\dfrac{5}{2}L\sin\theta(t) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\mathbf{(0,5)}$

Resolvendo-se o sistema de equações (1) + (5), chega-se, finalmente, às expressões temporais das componentes das forças aplicadas pelos mancais A e B e do torque $M\vec{k}$ fornecido à peça, compatíveis com o movimento descrito:

$$B_x(t) = -\frac{5}{6}mL\omega^2 + mg\frac{27}{2}\cos\theta\,(t)$$

$$B_y(t) = -mg\frac{27}{6}\sin\theta(t)$$

$$A_x(t) = -\frac{5}{3}mL\omega^2 - \frac{3}{2}mg\cos\theta(t)$$

$$A_y(t) = -\frac{45}{6}mg\sin\theta(t)$$

$$A_z(t) = 0$$

$$M(t) = mg\frac{5}{2}L\sin\theta\,(t)$$

Como $\dot{\theta} = \omega$ é um dado do problema, este fica completamente resolvido se se conhecer θ no instante $t = 0$. Supondo-se, por exemplo, que $\theta(0) = 0$, as expressões de $\vec{A}(t), \vec{B}(t)$ e $\vec{M}(t)$ se tranformam em:

$$A_x(t) = -\frac{5}{3}mL\omega^2 - \frac{3}{2}mg\cos\omega t$$

$$A_y(t) = -\frac{45}{6}mg\sin\omega t$$

$$A_z(t) = 0$$

$$B_x(t) = -\frac{5}{6}mL\omega^2 + \frac{27}{2}mg\cos\omega t$$

$$B_y(t) = -mg\frac{27}{6}\sin\omega t$$

$$M(t) = mg\frac{5}{2}L\sin\omega t$$

Dessa forma, no instante da partida ($t = 0, \theta = 0$), as reações aplicadas pelos mancais e o torque fornecido à peça, são:

$$\vec{A} = \left(-\frac{5}{3}mL\omega^2 - \frac{3}{2}mg\right)\vec{\imath}$$
$$\vec{B} = \left(-\frac{5}{6}mL\omega^2 + \frac{27}{2}mg\right)\vec{\imath}$$
$$\vec{M} = \vec{0}$$

É importante destacar que, para que a peça gire em torno do eixo Az com velocidade angular constante $\omega(t) = \omega$, duas condições devem ser satisfeitas:

1. Os mancais devem ser isentos de atrito.
2. A peça deve estar sujeita a um torque variável no tempo, dado por:

$$\vec{M}(t) = mg\frac{5}{2}L\sin\omega t\vec{k}$$

Note-se, finalmente, que a imposição da condição inicial $\omega(0) = \omega$, correponde à aplicação de um torque percussivo no eixo Az da peça, torque esse capaz de promover a abrupta variação de sua velocidade angular, inicialmente nula.

De acordo com o Teorema do Momento dos Impulsos, esse torque percussivo é dado por:

$$\mathcal{M}_{Az} = J_{Az}\omega = m(4R^2 + 3L^2)\omega$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Av. Prof. Mello Moraes, 2231, CEP 05508-030, São Paulo, SP
Tel. 55-11 30915337

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (2,0 pontos). Considerando o sistema apresentado na questão 1 e adotando o referencial ***Axyz*** solidário ao corpo, determinar as posições e os valores de duas massas m_1 e m_2 instaladas nas periferias do disco *A* e do anel *B*, suficientes para balancear o conjunto. Admita conhecidos as coordenadas x_G, y_G do centro de massa da peça bem como os seus produtos de inércia J_{Axz}, J_{Ayz}.

RESOLUÇÃO

Para o balanceamento, é necessário que:

1. o centro de massa se localize no eixo de rotação, ou seja, $(x'_G, y'_G, z'_G) = (O, O, O)$;
2. o eixo de rotação seja um eixo principal de inércia, isto é, $J'_{Axz} = 0, J'_{Ayz} = 0$.

O balanceamento é realizado acrescentando-se duas massas compensadoras m_1 e m_2 fixadas nas periferias do disco e do anel (portanto, à distância R do eixo). As equações abaixo descrevem essas restrições:

$$\begin{aligned} & m x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \\ & m y_G + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \\ & J_{Axz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 \\ & J_{Ayz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \end{aligned} \qquad (\mathbf{1,0})$$

Como o centro de massa localiza-se no semi-espaço $x > 0$, uma **<u>possível</u>** solução consiste em instalar ambas as massas em posições das periferias do disco e do anel situadas no semi-espaço $x < 0$, à distância máxima do eixo de rotação, ou seja, em $x_1 = x_2 = -R$.

Note-se que, procedendo-se dessa forma, não se introduzem assimetrias no plano Axy, uma vez que, sendo $y_1 = y_2 = 0$, a segunda e a quarta equação do sistema de equações acima se transformam em identidades.

Feitas essas considerações, as massas m_1 e m_2 serão localizadas, respectivamente, nos pontos:

$P_1(-R \quad 0 \quad 0)$

e

$P_2(-R \quad 0 \quad 3L)$

Tomando-se e primeira e a terceira equações do sistema anterior de 4 equações algébricas, e procedendo-se às substituições

$$x_G = \frac{5}{24}L \qquad x_1 = -R \qquad x_2 = -R \qquad J_{Axz} = \frac{5}{2}mL^2 \qquad z_1 = 0 \qquad z_2 = 3L$$

obtêm-se:

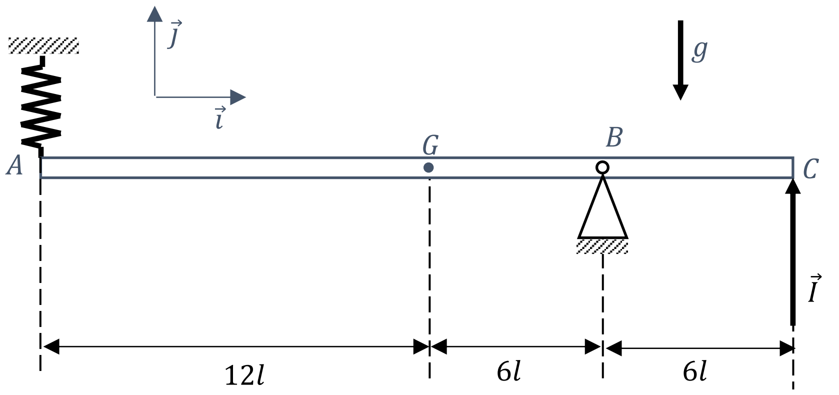
$$12m\frac{5}{24}L + m_1(-R) + m_2(-R) = 0$$

$$\frac{5}{2}mL^2 + m_1(-R)\cdot 0 + m_2(-R)\cdot 3L = 0$$

Resolvendo-se o sistema de duas equações a duas incógnitas acima, chega-se, finalmente, a:

$$m_1 = \frac{5}{3}\frac{L}{r}m \qquad m_2 = \frac{5}{6}\frac{L}{R}m \qquad (\mathbf{1,0})$$

3ª Questão (1,0 ponto). Uma barra homogênea AC de massa m está inicialmente em equilíbrio estático sustentada em B por uma articulação ideal e em A por uma mola linear ideal de constante elástica k. Em determinado instante, um impulso de módulo $|\vec{I}|$ é aplicado em C. Para o evento indicado, faça o diagrama de impulsos da barra.



RESOLUÇÃO

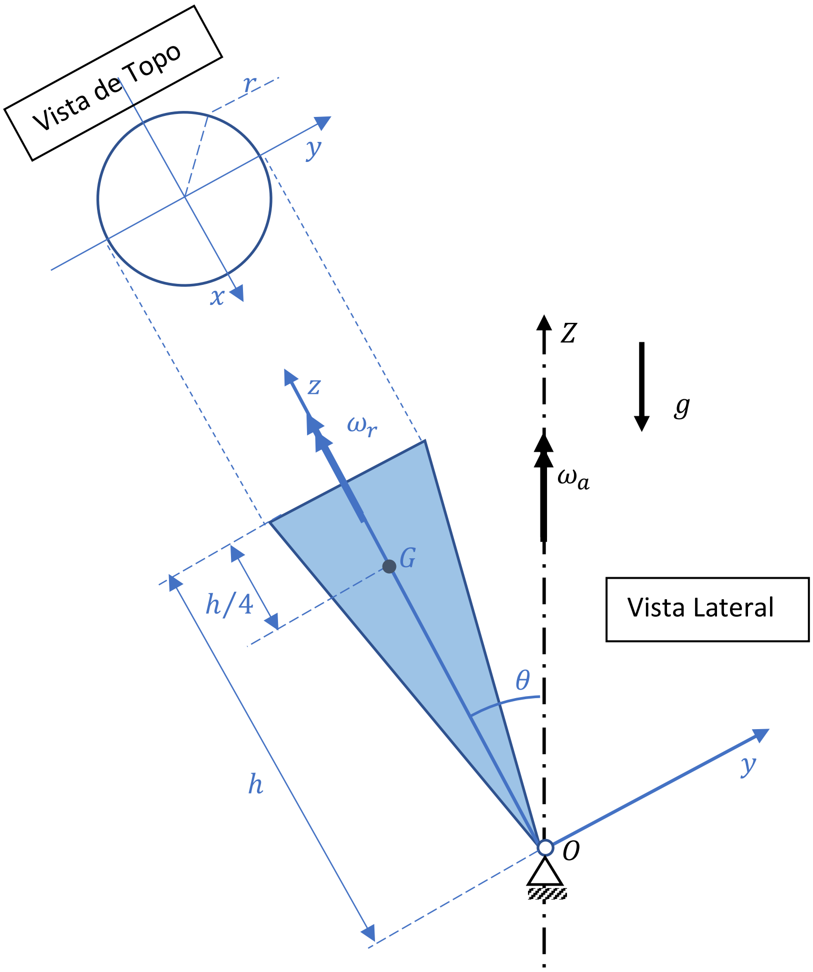
O diagrama de impulsos solicitado é apresentado na figura abaixo.

$\mathbf{(1,0)}$

É importante salientar que, pelo fato de a força exercida pela mola sobre a barra ter magnitude limitada ($F_A = ky$), a percussão originária dessa força é nula, ou seja:

$$\mathcal{P}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} ky(t)dt = 0$$

4ª Questão (3,5 pontos). O cone maciço e homogêneo ilustrado na figura (vistas lateral e topo), de massa m, raio r e altura h, gira com velocidade angular ω_r (conhecida e de módulo constante) em torno de seu eixo de simetria Oz, ao mesmo tempo em que este gira em torno do eixo vertical OZ com velocidade angular ω_a (de módulo constante, mas **desconhecida**). Sabendo-se que O é uma articulação fixa e que o ângulo θ entre os eixos Oz e OZ se mantém constante durante todo o movimento, pede-se:



(a) Escrever a expressão do vetor rotação absoluta do corpo no sistema de eixos $Oxyz$.

(b) Escrever a expressão da matriz de inércia do corpo em relação ao polo O, admitindo conhecidos: a posição do centro de massa $G(0,0,3h/4)$ e os momentos de inércia em relação aos eixos $Gxyz$, paralelos a $Oxyz$.

(c) Escrever a expressão da velocidade angular ω_a compatível com o movimento descrito em função dos demais dados do problema.

(d) Utilizando as expressões $J_{Gy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$ e $J_{Gz} = \frac{3}{10}mr^2$, determinar a relação entre r e h que torna **impossível** o movimento acima descrito, independentemente dos valores de ω_r e θ.

RESOLUÇÃO

(a) Expressão do vetor rotação absoluta do corpo.

$$\vec{\omega} = \omega_a \vec{K} + \omega_r \vec{z} = \omega_a\left[(\vec{K}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{K}\cdot\vec{k})\vec{k}\right] + \omega_r \vec{k} = \omega_a\left[\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right] + \omega_r \vec{k}$$

$$\therefore \vec{\omega} = \omega_a \sin\theta\,\vec{j} + (\omega_a\cos\theta + \omega_r)\vec{k} \qquad \mathbf{(0,5)}$$

(b) Expressão da matriz de inércia do corpo no polo O

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{Gx} + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy} + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(0,5)}$$

(c) Expressão da velocidade angular ω_a compatível com o movimento de precessão estacionária regular

Para determinar a expressão dessa velocidade angular, aplicaremos o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, utilizando o sistema de eixos $Oxyz$ como referencial móvel.

O momento da quantidade de movimento em O é expresso como:

$$\vec{H}_O = [J_O] \cdot [\omega] = \begin{bmatrix} J_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Oz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_a \sin\theta \\ \omega_a \cos\theta + \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_{Oy}\omega_a \sin\theta \\ J_{Oz}(\omega_a \cos\theta + \omega_r) \end{bmatrix} \quad \mathbf{(0,5)}$$

Utilizando-se o sistema de eixos $Oxyz$ como referencial móvel, o Teorema do Momento da Quantidade de Movimento se expressa como:

$$\vec{M}_O = \left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_{Oxyz} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_O = \vec{0} + \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_O = \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_O$$

O momento das forças externas resultante em O é:

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge \left(-mg\vec{K}\right) = \frac{3}{4}h\vec{k} \wedge \left[-mg\left(\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right)\right] = \frac{3}{4}mgh\sin\theta\,\vec{\imath} \quad \mathbf{(0,5)}$$

O momento dinâmico é:

$$\left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_{OXYZ} = \vec{\omega}_a \wedge \vec{H}_O = \omega_a\left[\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right] \wedge \left[J_{Oy}\omega_a \sin\theta\,\vec{j} + J_{Oz}(\omega_a\cos\theta + \omega_r)\vec{k}\right]$$

$$\therefore \left.\frac{d\vec{H}_O}{dt}\right|_{OXYZ} = \left[\left(J_{Oz} - J_{Oy}\right)\sin\theta\cos\theta\,\omega_a^2 + J_{Oz}\sin\theta\,\omega_a\omega_r\right]\vec{\imath} \quad \mathbf{(0,5)}$$

Dessa forma, tem-se:

$$\left(J_{Oz} - J_{Oy}\right)\sin\theta\cos\theta\,\omega_a^2 + J_{Oz}\sin\theta\,\omega_a\omega_r = \frac{3}{4}mgh\sin\theta$$

ou seja:

$$\omega_a = \frac{-J_{Oz}\omega_r \pm \sqrt{J_{Oz}^2\omega_r^2 + 3mgh\left(J_{Oz} - J_{Oy}\right)\cos\theta}}{2\left(J_{Oz} - J_{Oy}\right)\cos\theta} \quad \mathbf{(0,5)}$$

(d) Relação entre r e h que torna impossível o movimento descrito, independentemente dos valores de ω_r e θ

Considerando-se as expressões de J_{Gy} e J_{Gz} fornecidas no enunciado do problema, os momentos de inércia J_{Oz} e J_{Oy} ficam expressos como:

$$J_{Oz} = J_{Gz} = \frac{3}{10}mr^2$$

e

$$J_{Oy} = J_{Gy} + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2 + \frac{9}{16}mh^2 = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$$

Substituindo-se essas expressões na equação de 2º grau anterior que fornece os valores de ω_a compatíveis com o movimento de precessão estacionária regular, tem-se:

$$\omega_a = \frac{-\frac{3}{10}mr^2\omega_r \pm \sqrt{\left(\frac{3}{10}mr^2\omega_r\right)^2 + 3mgh\left(\frac{3}{20}mr^2 - \frac{3}{5}mh^2\right)\cos\theta}}{2\left(\frac{3}{20}mr^2 - \frac{3}{5}mh^2\right)\cos\theta}$$

De forma imediata, vê-se que, independentemente dos valores de ω_r e θ, o problema não tem solução se

$$\frac{1}{20}r^2 - \frac{1}{5}h^2 = 0$$

ou seja, se

$$\frac{r}{h} = 2 \qquad (\mathbf{0,5})$$