ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

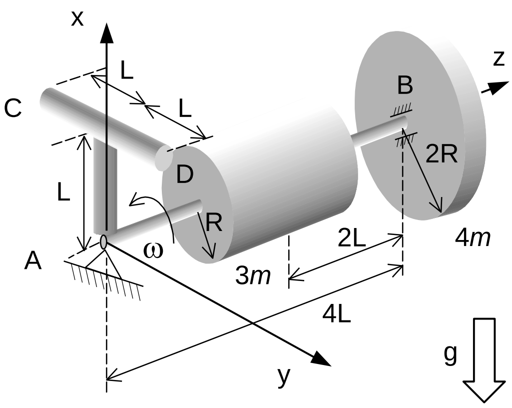
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA II – PME 3200 –Primeira Prova – 3 de Maio de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

1ª Questão (3,5 pontos). O eixo de comprimento $4L$ e massa $2m$ é apoiado na articulação A e no anel B. O sistema é ainda composto por um cilindro de raio R e massa $3m$ e por um disco de raio $2R$ e massa $4m$ respectivamente posicionados a meio comprimento e na extremidade B do eixo. Na extremidade A do eixo é soldada uma haste no formato T. Esta haste é formada por um segmento reto vertical de comprimento L e massa m e outro segmento CD alinhado com o eixo y, de comprimento $2L$ e massa $2m$. O sistema gira em torno do eixo z com velocidade angular constante ω. Considerando os eixos $Axyz$ solidários ao corpo, pede-se determinar:



(a) a posição do centro de massa do conjunto;
(b) os produtos de inércia e o momento de inércia em relação ao eixo Az, considerando o eixo e as hastes esbeltos;
(c) os valores de duas massas concentradas **adicionadas** m_1 e m_2 fixadas na superfície externa do cilindro e do disco ($\boldsymbol{z}_1 = 2L$ e $\boldsymbol{z}_2 = 4L$) e no plano $y = 0$, suficientes para balancear o sistema.

RESOLUÇÃO

a) a posição do centro de massa do conjunto em relação ***Axyz***; massa total: $M = 12m$

$x_G = (m(L/2) + 2m(L))/12m = \frac{5}{24}L;$ $\qquad y_G = 0$

$z_G = (3m(2L) + 2m(2L) + 4m(4L))/12m = \frac{13}{6}L \quad \Rightarrow \quad G = (5L/24, 0, 13L/6)$ (0,5)

b) os produtos de inércia em relação ***Axyz*** são:

$J_{Axz} = 0 \quad ; \quad J_{Axy} = 0 \quad ; \quad J_{Ayz} = 0$ (1,0)

Momento de inércia em relação ao eixo A***z***, considerando os eixos esbeltos:

$J_z = \frac{4m(2R)^2}{2} + \frac{3mR^2}{2} + mL^2/3 + (2m(2L)^2/12 + 2mL^2) \ \Rightarrow J_z = m(\frac{19R^2}{2} + 3L^2)$ (0,5)

c) os valores de duas massas concentradas **adicionadas** $\boldsymbol{m}_1$ e $\boldsymbol{m}_2$ fixadas na superfície externa do cilindro e do disco ($\boldsymbol{z}_1 = 2L$ e $\boldsymbol{z}_2 = 4L$) e no plano $\boldsymbol{y} = 0$ suficientes para balancear o sistema.

Posições das massas: $\boldsymbol{m}_1$ $(-R, 0, 2L)$; $\boldsymbol{m}_2$ $(2R, 0, 4L)$;

$J'_{Axz} = J_{Axz} + m_1(-R)(2L) + m_2(2R)(4L) = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 4m_2$ (0,5)

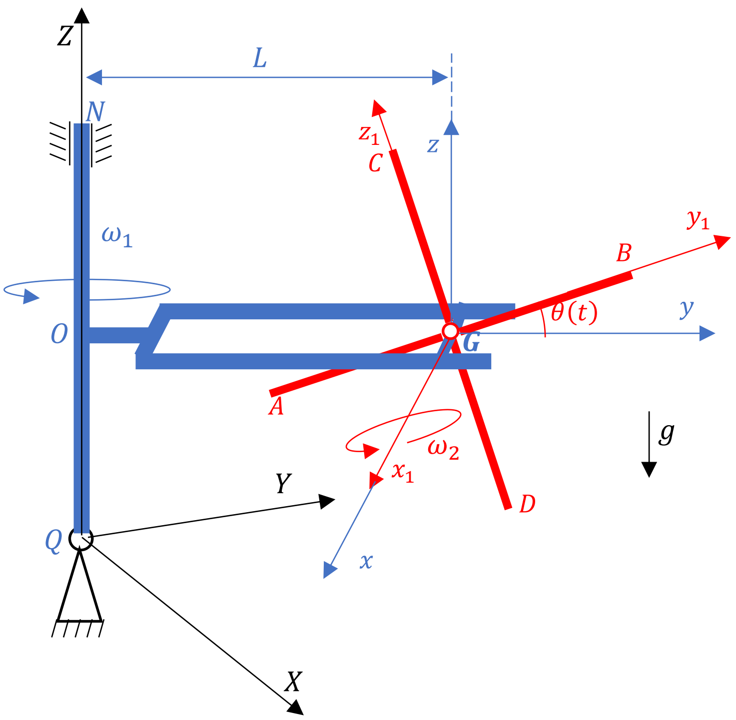
$M\,x_G + m_1\,(-R) + m_2\,(2R) = 0$ $\rightarrow$ $12m \cdot \frac{5L}{24} - 4m_2 \cdot R + m_2 \cdot 2R = 0$ $\rightarrow$

$m_2 = \frac{5L}{4R}m$ em $(2R, 0, 4L)$. (0,5) e $m_1 = \frac{5L}{R}m$ em $(-R, 0, 2L)$. (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



2ª Questão (4,5 pontos). A peça $ABCD$, composta por duas barras delgadas homogêneas AB e CD de comprimentos a e massas m, gira com velocidade angular $\omega_2\vec{\imath}$, (ω_2 constante), em torno do eixo Gx do suporte em forma de garfo, $QNOG$, articulado em Q e vinculado a um anel N. Tendo massa desprezível, esse suporte gira com velocidade angular $\omega_1\vec{K}$ (ω_1 constante) em torno do eixo vertical fixo OZ. O sistema de eixos $QXYZ$ é fixo no espaço, o sistema de eixos $Gxyz$ é ligado ao suporte $QNOG$ e o sistema de eixos $Gx_1y_1z_1$ é ligado à peça $ABCD$. As bases $\vec{I}\vec{J}\vec{K}$, $\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k}$ e $\vec{\imath}_1\vec{\jmath}_1\vec{k}_1$ são associadas, respectivamente, aos eixos $QXYZ$, $Gxyz$ e $Gx_1y_1z_1$.

Pede-se:

(a) A matriz de inércia da peça $ABCD$, referente ao polo G, descrita no sistema de eixos $Gx_1y_1z_1$.
(b) Explicar por que se pode adotar como referencial móvel o sistema $Gxyz$, apesar de este não estar ligado à peça $ABCD$.
(c) O vetor rotação absoluta da peça $ABCD$ descrito no sistema de eixos $Gxyz$.
(d) A quantidade de movimento angular da peça $ABCD$, referente ao polo G, descrita no sistema de eixos $Gxyz$.
(e) O diagrama de corpo livre da peça $ABCD$.
(f) As reações aplicadas pelo suporte à peça $ABCD$.
(g) O binário aplicado pelo suporte à peça $ABCD$.
(h) Seria possível remover o anel N de forma tal a que o sistema realizasse precessão estacionária regular em torno do eixo vertical QZ ? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO

Item a

Os momentos de inércia das barras AB e CD são calculados a seguir:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$$J_{Gx}^{AB} = \frac{ma^2}{12}$$
$$J_{Gy}^{AB} = 0$$
$$J_{Gz}^{AB} = \frac{ma^2}{12}$$
$$J_{Gx}^{CD} = \frac{ma^2}{12}$$
$$J_{Gy}^{CD} = \frac{ma^2}{12}$$
$$J_{Gz}^{CD} = 0$$

Notando que os eixos $Gx_1y_1z_1$da peça $ABCD$ são eixos principais de inércia, a sua matriz de inércia, referente ao polo G e descrita em $Gx_1y_1z_1$ é dada por:

$$[J_G] = \begin{bmatrix} J_{Gx}^{AB} + J_{Gx}^{CD} & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy}^{AB} + J_{Gy}^{CD} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Gz}^{AB} + J_{Gz}^{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix}$$

(0,5 ponto)

Item b

Calculando-se o momento de inércia da peça em relação ao eixo Gx, por exemplo, tem-se:

$$J_{Gx1} = [0 \quad \cos\theta \quad -\sin\theta] \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = [0 \quad \cos\theta \quad -\sin\theta] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ma^2}{12}\cos\theta \\ -\frac{ma^2}{12}\sin\theta \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{12}$$

Vê-se, portanto, que o momento de inércia do corpo em relação a qualquer eixo passante por G e contido no plano Gyz tem o mesmo valor $\frac{ma^2}{12}$, ou seja, o elipsóide de inércia do corpo é de revolução. Portanto, para um observador situado no referencial $Gxyz$ ligado ao suporte, a matriz de inércia do corpo $ABCD$ mantém-se invariante ao longo do movimento, condição que possibilita adotar como referencial móvel, na equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular, o sistema de eixos $Gxyz$ ligado ao suporte $QNOG$.

(0,5 ponto)

Item c

O vetor rotação da peça $ABCD$, descrito no referencial $Gxyz$ é dado por:

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{\imath}$$

(0,5 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Item d

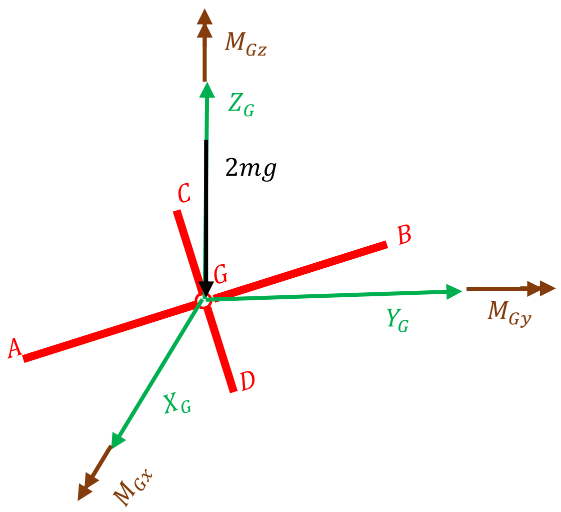
A quantidade de movimento angular da peça $ABCD$, referente ao polo G, é:

$$\vec{H}_G = [J_G]\cdot[\omega] = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \frac{ma^2}{6}\omega_2\vec{\imath} + \frac{ma^2}{12}\omega_1\vec{k}$$

(0,5 ponto)

Item e

O diagrama de corpo livre da peça $ABCD$ é apresentado na figura a seguir.



(0,5 ponto)

Item f

Aplicando-se o Teorema da Resultante, tem-se:

$$X_G\vec{\imath} + Y_G\vec{\jmath} + Z_G\vec{k} - 2mg\vec{k} = 2m\vec{a}_G$$

A aceleração de G é dada por:

$$\vec{a}_G = \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge L\vec{\jmath}\right] = -\omega_1^2 L\vec{\jmath}$$

Assim, tem-se:

$$X_G\vec{\imath} + Y_G\vec{\jmath} + Z_G\vec{k} - 2mg\vec{k} = -2m\omega_1^2 L\vec{\jmath}$$

Ou seja:

$X_G = 0 \quad Y_G = -2mL\omega_1^2 \quad Z_G = 2mg$

(0,5 ponto)

Item g

Aplicando-se o Teorema da Quantidade de Movimento Angular, tem-se:

$$\vec{M}_G = [J_G] \cdot [\dot{\omega}] + \vec{\omega}_{arr} \wedge \{[J_G] \cdot [\omega]\}$$

Notando que, em relação ao referencial $Gxyz$ $\vec{\omega}$ é invariante, de modo que

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega} = \vec{0}$$

tem-se:

$$\vec{M}_G = \omega_1\vec{k} \wedge \left\{ \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \right\} = \omega_1\vec{k} \wedge \left(\frac{ma^2}{6}\omega_2\vec{i} + \frac{ma^2}{12}\omega_1\vec{k} \right) = \frac{ma^2}{6}\omega_1\omega_2\vec{j}$$

(0,5 ponto)

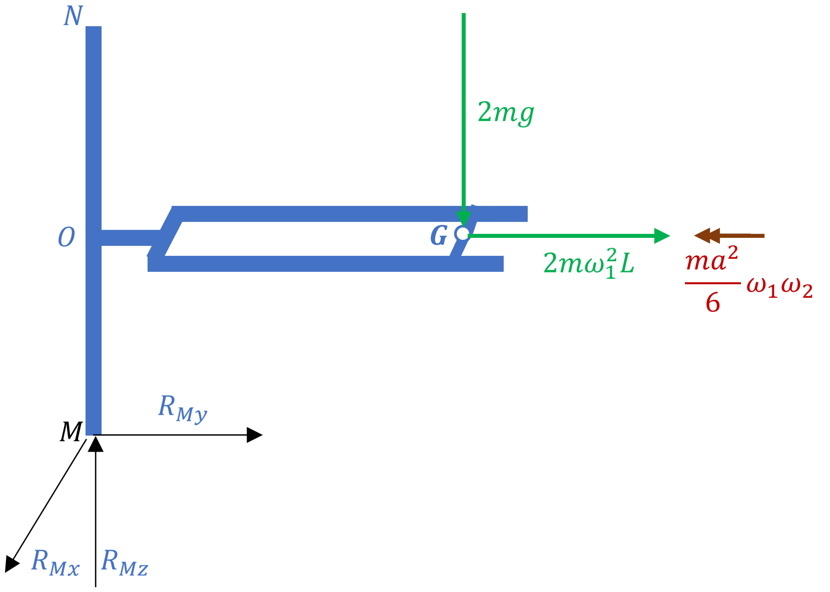
Item h

O diagrama de corpo livre da peça $MNOG$ é apresentado na figura a seguir:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



(0,5 ponto)

Aplicando-se o Teorema da Quantidade de Movimento Angular à peça $MNOG$,relativamente ao polo M , tem-se:

$$\left(L\vec{j}+\frac{L}{2}\vec{k}\right)\wedge\left(-2mg\vec{k}+2m\omega_1^2L\vec{j}\right)-\frac{ma^2}{6}\omega_1\omega_2\vec{j}=\vec{0}$$

Desenvolvendo-se, resulta

$$-2mgL\vec{\imath}-m\omega_1^2L^2\vec{\imath}-\frac{ma^2}{6}\omega_1\omega_2\vec{j}=\vec{0}$$

A equação vetorial anterior nos mostra que, na ausência do anel N é impossível contrabalançar o momento devido ao peso da peça $ABCD$ com o binário giroscópico, uma vez que eles são ortogonais entre si.

(0,5 ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (2,0 pontos).

(a) Considere um corpo rígido e dois sistemas cartesianos $(Oxyz)$ e $(Ox'y'z')$. Seja $[B]$ a matriz de mudança de base que leva o primeiro ao segundo sistema. Sejam $[J_O]$ e $[J_O']$ as matrizes de inércia do corpo calculadas nos dois sistemas. Qual é a expressão matemática que relaciona as duas matrizes de inércia? Comente sua resposta.

(b) Está correta a assertiva: "***o balanceamento completo de um rotor se resume a fazer do eixo de rotação um eixo central de inércia***"? Justifique sua resposta.

(c) Pode-se mostrar (Pesce, CP, *Dinâmica dos Corpos Rígidos*, cap. 6.5.2) que o movimento de um pião ideal é regido por uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-linear, que governa o ângulo de nutação, $\theta(t)$:

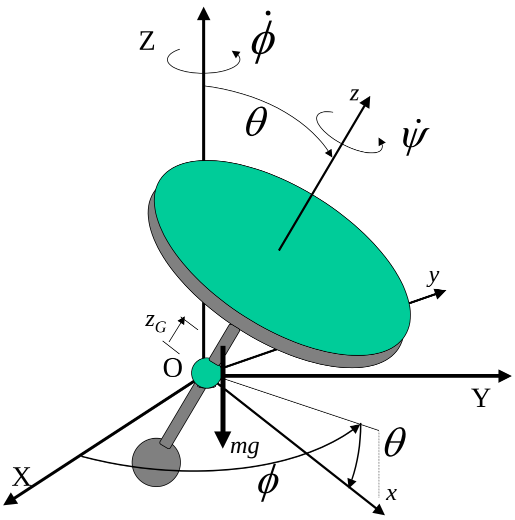
$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha-\beta\cos\theta)(\beta-\alpha\cos\theta)}{I\,\mathrm{sen}^3\theta} - mgz_G\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

onde $\alpha = I\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}^2\theta + J\cos\theta\,(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$

$$\beta = J(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$$

são dois ***invariantes*** do movimento.

Pergunta-se: ***o que, fisicamente, representam estes dois invariantes***?



RESOLUÇÃO

Item a

A relação entre as matrizes de inércia descritas nos sistemas $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ é dada por

$$[J_O'] = [B]\cdot[J_O]\cdot[B]^T$$

onde

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança de base entre os sistemas $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ e b_{ij} representa o cosseno do ângulo formado entre o i-ésimo eixo do sistema $Ox'y'z'$ e o j-ésimo eixo do sistema $Oxyz$.

É importante salientar que o tensor de inércia do corpo, representado geometricamente pelo seu elipsoide de inércia, é **invariante** a transformações de base (basta notar que esse elipsoide está rigidamente ligado ao corpo), mas a matriz de inércia referida a um dado polo O pertencente ao corpo ou à sua extensão material, embora preserve 3 invariantes (traço, soma dos menores de ordem 2 e determinante), apresenta distintas representações para distintos sistemas de eixos com centro em O . Na representação canônica, em que o sistema de eixos coincide com os eixos principais de inércia do corpo, a matriz de inércia assume a forma diagonal.

(1,0 ponto)

Item b

A assertiva: "***o balanceamento completo de um rotor se resume a fazer do eixo de rotação um eixo central de inércia***" está correta.

O balanceamento envolve duas premissas:
(a) o centro de massa pertencer ao eixo de rotação, o denominado "balanceamento estático";
(b) o eixo de rotação ser um eixo principal de inércia, o denominado "balanceamento dinâmico".

As premissas (a) e (b) definem um "eixo central de inércia".

(0,5 ponto)

Item c

Os invariantes α e β que comparecem na equação diferencial que governa o movimento de nutação do pião simétrico correspondem, respectivamente, à projeção da quantidade de movimento angular do corpo na direção vertical e à projeção da quantidade de movimento angular do corpo na direção do eixo giroscópico, ou seja:

$$\alpha = \vec{H}_O \cdot \vec{K}$$
$$\beta = \vec{H}_O \cdot \vec{k}$$

(0,5 ponto)