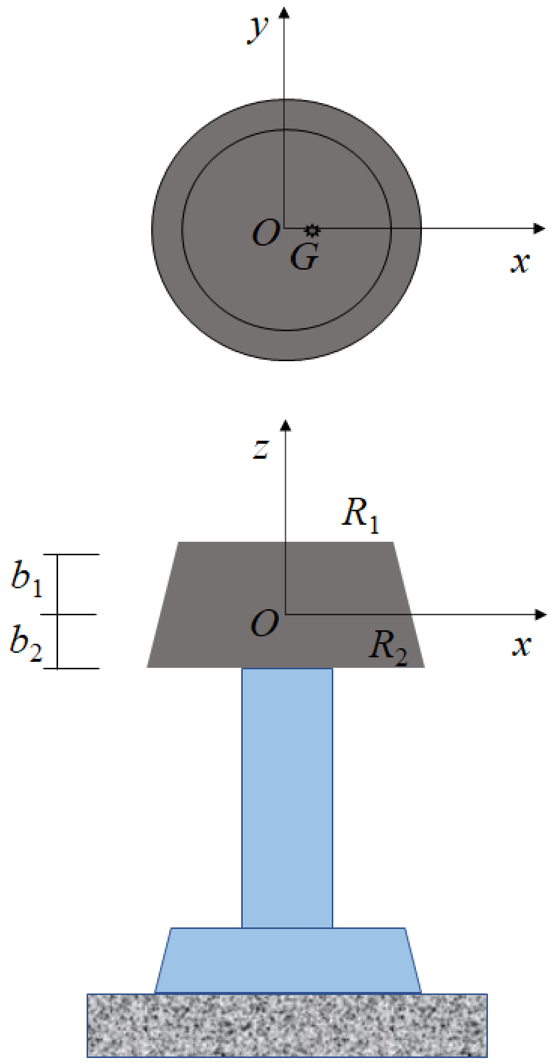
P1-2021 – Balanceamento de um rotor cônico

Rotor cônico de massa *m*.



O sistema de balanceamento, indicado esquematicamente na cor azul, detectou que o rotor de formato cônico está desbalanceado. O sistema cartesiano Oxyz, orientado pela base ortonormal (**i**,**j**,**k**), é solidário ao rotor, sendo *Oz* o eixo de rotação. Sob velocidade angular *ω*, **mantida constante**, as medidas do dinamômetro indicaram reações (força e torque) aplicadas pelo mancal:

$$\mathbf{F}^{reat} = -mg(9\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_O^{reat} = 8x_G mg\mathbf{j}$$

onde m é a massa do rotor e x_G é a coordenada *x* do centro de massa. Considera-se os produtos de inércia definidos por:

$$J_{xz} = +\int_{CR} xydm$$

$$J_{xz} = +\int_{CR} xzdm$$

$$\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{k} \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega \end{bmatrix}^T$$

$$[J_O] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R}$$

$$[J_O]\{\cancel{\dot{\Omega}}\} + \mathbf{\Omega} \wedge [J_O]\{\Omega\} = \{M_O^{ext}\}$$

Eqs de Newton-Euler

Então:

$$-m\omega^2 x_G \mathbf{i} = \mathbf{F}^{reat} - mg\mathbf{k} =$$

$$= -mg(9\mathbf{i} - \mathbf{k}) - mg\mathbf{k} = -9mg\mathbf{i}$$

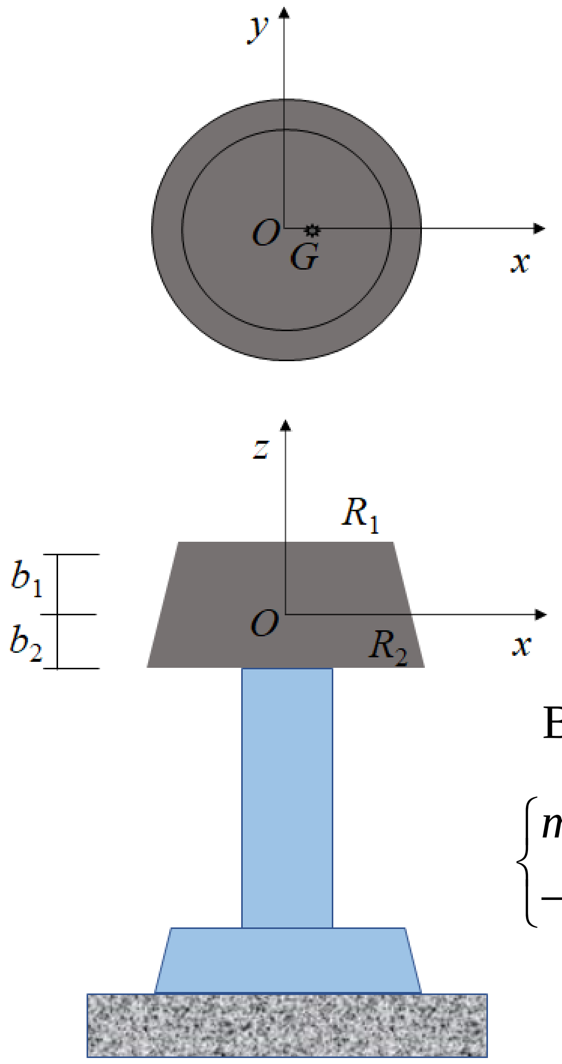
e

$$-J_{xz}\omega^2\mathbf{j} = \mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{M}_O^{reat} + x_G\mathbf{i} \wedge (-mg\mathbf{k}) =$$

$$= \mathbf{M}_O^{reat} + x_G mg\mathbf{j} = 8x_G mg\mathbf{j} + x_G mg\mathbf{j}$$

P1-2021 – Balanceamento de um rotor cônico

Rotor cônico de massa *m*.



$$\mathbf{F}^{reat} = -mg(9\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_O^{reat} = 8x_G mg\mathbf{j}$$

$$J_{xz} = +\int_{CR} xydm$$

$$J_{xz} = +\int_{CR} xzdm$$

Portanto:

$$m\omega^2 x_G \mathbf{i} = 9mg\mathbf{i}$$

e

$$-J_{xz}\omega^2 \mathbf{j} = 9x_G mg\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_G = 9\frac{g}{\omega^2} \quad \text{e} \quad J_{xz} = -9\frac{x_G mg}{\omega^2} = -mx_G^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha &= 9\\ \beta &= -1\end{aligned}}$$

Balanceamento:

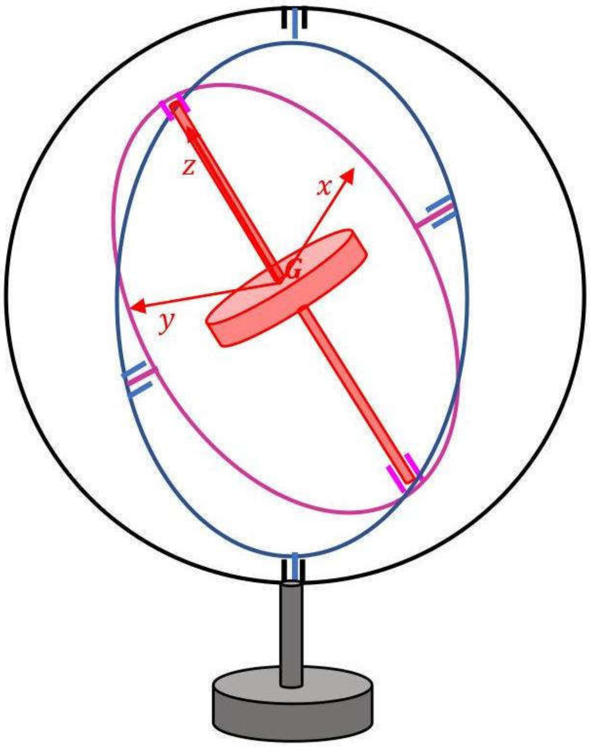
$$\begin{cases} mx_G - m_1R_1 - m_2R_2 = 0 \\ -m_1R_1b_1 + m_2R_2b_2 + J_{xz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m} = \frac{1}{R_1(b_1+b_2)}\left[x_G b_2 + \frac{J_{xz}}{m}\right] \quad \text{e} \quad \frac{m_2}{m} = \frac{1}{R_2(b_1+b_2)}\left[x_G b_1 - \frac{J_{xz}}{m}\right]} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\gamma_1 &= 1\\ \gamma_2 &= 1\end{aligned}}$$

Questão 2

Incompleto

Vale 1,5 ponto(s).

O disco homogêneo de massa m e raio r, originalmente em equilíbrio apoiado sobre uma suspensão Cardan (vide figura), parte do repouso com vetor rotação absoluta $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$.



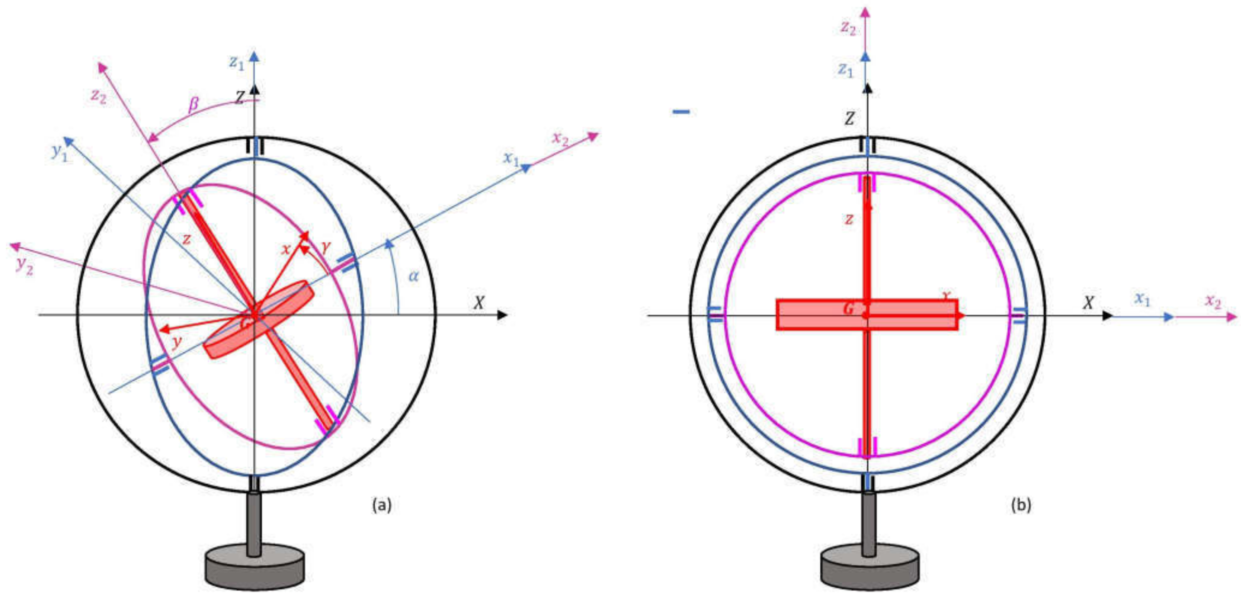
Analise o movimento do cilindro e, em seguida, assinale as alternativas corretas cuidadosamente, pois as respostas erradas receberão **pontuação negativa**.

- [ ] a. O disco realiza uma precessão estacionária regular em torno de seu eixo de simetria.
- [ ] b. O disco realiza um movimento periódico com ângulo de precessão invariante.
- [ ] c. O disco realiza um movimento periódico com ângulo de nutação variável.
- [x] d. Durante o movimento, há conservação da quantidade de movimento angular com respeito a um polo arbitrário pertencente ao disco ou à sua extensão material.
- [x] e. A direção do vetor $\vec{H}_G$ coincide com a do eixo de precessão do disco.
- [ ] f. O movimento do disco só é possível porque ele está sob a ação de um momento externo.

Questão 3
Vale 1,5 pontos

Um disco encontra-se originalmente em equilíbrio montado sobre uma suspensão Cardan. Conforme ilustrado na figura (a), essa suspensão compõe-se de 3 anéis: o anel preto é fixo no espaço; o anel azul pode girar apoiado em mancais ligados ao anel preto ao longo da direção GZ; o anel rosa pode girar apoiado em mancais ligados ao anel azul segundo a direção Gx_1. O disco, por sua vez, pode girar apoiado em mancais ligados ao anel rosa segundo a direção Gz_2. Os eixos $GXYZ, Gx_1y_1z_1, Gx_2y_2z_2$ são ligados, respectivamente, aos anéis preto, azul e rosa; os eixos $Gxyz$ são ligados ao disco.

Para orientar o disco conforme mostrado na figura (a), partiu-se de uma configuração em que os 3 anéis estavam alinhados no mesmo plano (figura b) e, em seguida, efetuaram-se rotações α, β, γ em torno dos eixos GZ, Gx_1, Gz_2, respectivamente e nesta ordem.



Pretende-se colocar o dispositivo em movimento, de forma tal que o eixo Gz do disco se mantenha permanentemente orientado ao longo da direção GX.

Selecione, dentre as opções a seguir, o estado cinemático inicial do disco que atende ao objetivo estabelecido no parágrafo anterior.

- a. $\gamma = 0, \beta = 0, \dot{\gamma} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\alpha} \neq 0$
- b. $\alpha = 0, \beta = 0, \dot{\gamma} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} \neq 0$
- c. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} \neq 0$
- d. $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} \neq 0$
- e. $\alpha = 0, \beta = \pi, \dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} \neq 0$

PME 3200 – P1 2021 – questão 4

Considere o sistema formado por uma barra esbelta e homogênea AB de massa m, comprimento ℓ e uma pequena esfera, também de massa m. A extremidade B da barra está apoiada em uma superfície fixa, rígida, lisa e vertical. Na extremidade A existe uma articulação ideal.

Sabe-se que, imediatamente antes de a esfera entrar em contato com o ponto P da barra, sua velocidade possui módulo v e direção que forma ângulo θ com a normal de choque. O coeficiente de restituição é conhecido e vale e. Não há atrito no choque.

Utilize a base orientada $A\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ e:

(a) faça o diagrama de corpo livre para para impulsos na barra AB (1,0);

(b) Em função dos parâmetros m, ℓ, v, θ e de maneira coerente com a base $A\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, equacione o problema de modo a obter o sistema cuja solução fonece:

- o módulo da velocidade v' da esfera imediatamente após o choque;
- o ângulo ϕ entre a normal de choque e o vetor velocidade da esfera imediatamente após o choque;
- o impulso aplicado pela esfera no ponto P da barra;
- as velocidades do centro de massa $\vec{v}'_G$ e angular $\vec{\omega}'$ da barra imediatamente após o choque;
- as componentes em $\vec{i}$ e $\vec{j}$ da reação impulsiva em A.

(TRI e relações cinemáticas: 1,0; TMI: 0,5; hipótese de Newton: 0,5)

(c) numere as equações e indique quais delas resolvem o problema. Não é necessário achar a solução dessas equações (0,5)

Faça eventuais comentários no campo aberto abaixo. Digitalize sua dedução manuscrita em formato .pdf. Carregue os arquivos.

Intitule os arquivos no padrão:

P1 - Impacto <Nome Sobrenome>.pdf

Cuide para que sua caligrafia seja legível. Organize seu texto. Cuide também para que a digitalização tenha qualidade, com nitidez e contraste adequados, de tal forma que a sua resolução possa ser bem apreciada pelo avaliador.

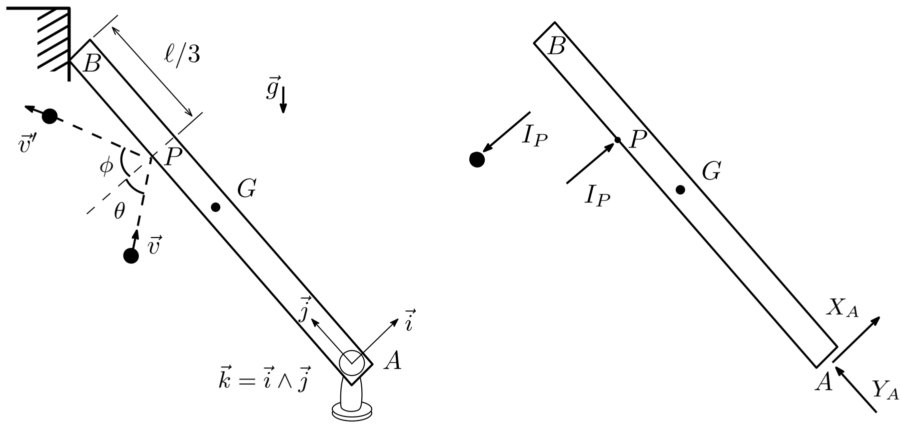


Figura 1:

Solução
O DCL está na fig. 1.

TRI na esfera:

$$m(\vec{v}' - \vec{v}) = -I_P\vec{i}$$

$$m[(-v'\cos\phi - v\cos\theta)\vec{i}) + (v'\operatorname{sen}\phi - v\operatorname{sen}\theta\vec{j})] = -I_P\vec{i}$$

$$\vec{i} : -m(v'\cos\phi + v\cos\theta) = -I_P \qquad (1)$$

$$\vec{j} : m(v'\operatorname{sen}\phi - v\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad (2)$$

TRI na barra:

$$m(\vec{v}'_G - \vec{v}_G) = (I_P + X_A)\vec{i} + Y_A\vec{j}$$

$$m\vec{v}'_G = (I_P + X_A)\vec{i} + Y_A\vec{j}$$

Utilizando a equação fundamental da cinemática para um corpo rígido (barra) imediatamente após o choque segue que:

$$\vec{v_G}' = \vec{v}_A + \omega'\vec{k} \wedge \ell/2\vec{j} \quad \therefore \quad \vec{v}'_G = -\omega'\ell/2\vec{i} \qquad (3)$$

Voltando ao TRI na barra,

$$\vec{i} : -m\omega'\ell/2 = I_P + X_A \qquad (4)$$

$$\vec{j} : Y_A = 0$$

TMI na barra AB, polo A:

$$\vec{H}'_A - \vec{H}_A = \mathcal{M}_A$$

$$J_{A_z}\omega'\vec{k} = (2\ell/3)\vec{j} \wedge I_P\vec{i}$$

$$\vec{k} : m\ell^2\omega'/3 = (-2\ell/3)I_P \Rightarrow$$

$$m\ell\omega' = -2I_P \qquad (5)$$

Hip. de Newton (coeficiente de restituição e, subscrito $\vec{v}_P$, $P \in$ barra AB e $\vec{v}$ indicando a esfera):

$$(\vec{v}'_P - \vec{v}')\bullet\vec{i} = -e(\vec{v}_P - \vec{v})\bullet\vec{i}$$
$$v'_P - (-v' \cos\phi) = -e(0 - v\cos\theta) \Rightarrow$$
$$v'_P + v'\cos\phi = ev\cos\theta \qquad (6)$$

Equação fundamental da cinemática do CR na barra para os pontos P e A:

$$v'_P = -2\ell\omega'/3 \qquad (7)$$

Incógnitas: ϕ, v', I_P, ω', X_A, v'_P v'_G
Uma sequência possível para a solução do sistema com sete equações e sete incógnitas é a seguinte:

1. (7) em (6) $\rightarrow$ (8);
2. $v'\cos\phi$ de (8) em (1) $\rightarrow$ (9);
3. (9) em (4) $\rightarrow \omega' = \frac{-3v(1+e)\cos\theta}{7\ell}$;
4. ω' em (6) $\rightarrow v'_P = \frac{2v(1+e)\cos\theta}{7}$;
5. ω' em (4) $\rightarrow I_P = \frac{3mv(1+e)\cos\theta}{14}$;
6. I_P em (0.3) $\rightarrow X_A = 0$.

   Observe que esse resultado era esperado, pois a cota onde se dá o impacto da esfera na barra é exatamente seu *centro de percussão*;
7. I_P em (1) $\rightarrow v' = \frac{v\cos\theta[3(1+e)-1]}{14\cos\phi}$ (10)
8. (10) em (2) $\rightarrow \cos\phi = \frac{3(1+e)-1}{14}\cot\theta$
9. $\cos\phi$ em (2) $\rightarrow v' = v\,\mathrm{sen}\,\theta$