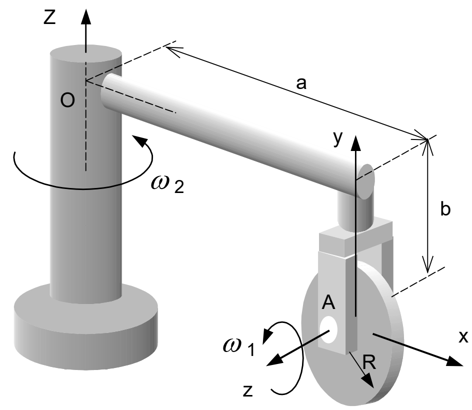
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Turma 3
Primeira Avaliação – 2 de Junho de 2020
Duração da Prova: 90 minutos (não é permitida a comunicação com terceiros)

1ª Questão (6,0 pontos)



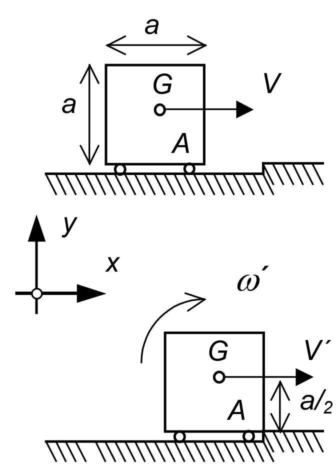
Um disco de raio ***R*** e massa **m** gira com velocidade angular relativa constante $\boldsymbol{\omega_1}$ em torno do mancal ***A*** do garfo de massa desprezível e altura ***b***. O braço de sustentação do garfo, de comprimento ***a*** e massa ***M***, gira em torno do eixo ***OZ*** da torre de suporte, com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega_2}$. Pede-se, expressando no sistema de coordenadas ***Axyz***, solidário ao garfo:

a) determinar a energia cinética ***T*** do sistema (disco + braço);

b) determinar o momento angular $\vec{H}_A$ do disco, em relação ao pólo **A**.

c) determinar as reações (forças e momentos) em ***A***, que sustentam o movimento do disco.

2ª Questão (4,0 pontos)



Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, translada sobre um plano horizontal com velocidade ***V***, quando colide no canto ***A*** com um pequeno degrau fixo. Considerando uma colisão totalmente plástica (***e*** = 0), determine:

a) a velocidade angular do cubo $\boldsymbol{\omega'}$, imediatamente após a colisão;

b) a energia cinética do cubo no instante imediatamente após a colisão;

c) o valor de ***V*** a partir do qual o cubo tomba após a colisão.

Dado: $J_{Gzz} = \dfrac{m\ a^2}{6}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

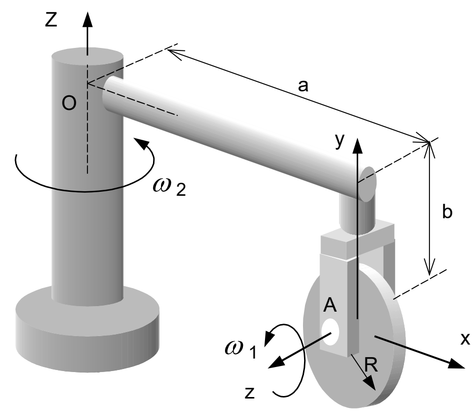
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3200 – MECÂNICA II – Primeira Avaliação - 02/06/2020

Resolução da 1ª Questão (6,0 pontos)

Um disco de raio ***r*** e massa **m** gira com velocidade angular relativa constante $\boldsymbol{\omega_1}$ em torno do mancal ***A*** do garfo de massa desprezível e altura ***b***. O braço de sustentação do garfo, de comprimento ***a*** e massa ***M***, gira em torno do eixo ***OZ*** da torre de suporte, com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega_2}$. Pede-se, expressando no sistema de coordenadas ***Axyz***, solidário ao garfo:



a) determinar a energia cinética ***T*** do sistema (disco + braço);

b) determinar o momento angular $\vec{H}_A$ do disco, em relação ao pólo ***A***.

c) determinar as reações (forças e momentos) em ***A*** que sustentam o movimento do disco.

a) determinar a energia cinética ***T*** do sistema (disco (pólo em ***A***) + braço (pólo em ***O***));

$$\vec{V}_A = \omega_2 \vec{K} \wedge (A-O) = \omega_2 \vec{j} \wedge \left(a\vec{i} - b\vec{j}\right) = -a\omega_2 \vec{k} \quad ; \quad \vec{\omega}_{braço} = \omega_2 \vec{K} = \omega_2 \vec{j} \quad ; \quad \vec{\omega}_{disco} = \omega_2 \vec{K} + \omega_1 \vec{k} = \omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}$$

$$T_{disco} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2}\{\vec{\omega}_{disco}\}^T [J]_{Axyz} \{\vec{\omega}_{disco}\} \quad polo\, em\, A$$

$$T_{disco} = \frac{m a^2 \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2}\{0 \quad \omega_2 \quad \omega_1\} \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} = \frac{m\left(4a^2 + R^2\right)}{8}\omega_2^2 + \frac{mR^2}{4}\omega_1^2$$

$$T_{braço} = \frac{1}{2}\{\vec{\omega}_{braço}\}^T [J]_{Oxyz} \{\vec{\omega}_{braço}\} = \frac{1}{2}\{0 \quad \omega_2 \quad 0\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{Ma^2}{6}\omega_2^2$$

$$\boxed{T_{sistema} = \left[\frac{m\left(4a^2 + R^2\right)}{8} + \frac{Ma^2}{6}\right]\omega_2^2 + \frac{mR^2}{4}\omega_1^2} \qquad (2,0)$$

b) determinar o momento angular $\vec{H}_A$ do disco, em relação ao pólo **A**.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

$\vec{H}_O = (G-O)\wedge m\vec{V}_O + J_O\,\vec{\omega}$ pólo em $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{G}$ $\Rightarrow$ $\{H_A\} = [J]_{Axyz}\{\omega_{disco}\} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$

$$\boxed{\vec{H}_A = \frac{mR^2}{4}\left(\omega_2\vec{j} + 2\omega_1\vec{k}\right)} \qquad (2,0)$$

c) determinar as reações (forças e momentos) em ***A*** que sustentam o movimento do disco. Os momentos e as forças suficientes para manter a trajetória prescrita do disco são:

Aplicando o ***TQMA*** no disco de raio ***R***, considerando o pólo ***A*** , para $\boldsymbol{\omega_1}$ e $\boldsymbol{\omega_2}$ constantes:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{H}_A\right) = \vec{M}_A$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mR^2}{4}\left(\omega_2\vec{j} + 2\omega_1\vec{k}\right)\right) = \frac{mR^2}{4}\left(\omega_2\dot{\vec{j}} + 2\omega_1\dot{\vec{k}}\right) = \vec{M}_A$$

a variação dos versores é: $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{j} = \omega_2\,\vec{j}\wedge\vec{j} = 0$ e $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{k} = \omega_2\,\vec{j}\wedge\vec{k} = \omega_2\,\vec{i}$

$$\boxed{\frac{mR^2}{2}\omega_1\omega_2\,\vec{i} = \vec{M}_A} \qquad (1,0)$$

Aplicando o ***TR*** no centro de massa ***G*** do disco de massa ***m***, a fórmula de campo de acelerações e usando o **DFCL**:

$$m\vec{a}_G = \sum\vec{F}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha}\wedge(G-O) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-O)]$$
$$\vec{a}_G = 0 + 0 - a\omega_2^2\,\vec{i}$$

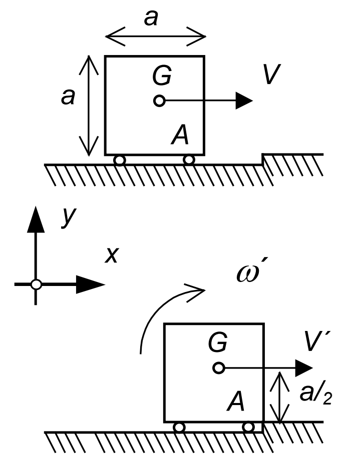
$$-ma\omega_2^2\,\vec{i} = \vec{R}_A - mg\,\vec{j}$$

$$\boxed{-ma\omega_2^2\,\vec{i} + mg\,\vec{j} = \vec{R}_A} \qquad (1,0)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



Resolução da 2ª Questão - (4,0 pontos)

Um cubo homogêneo de lado ***a*** e massa ***m***, translada sobre um plano horizontal com velocidade ***V***, quando colide no canto ***A*** com um pequeno degrau. Considerando a colisão totalmente plástica (***e*** = 0), determine:

a) a velocidade angular do cubo ***ω*´**, imediatamente após a colisão?
Resolução: Sistema: bloco de massa ***m*** e velocidade inicial ***V***.

Fazendo **DICL** e utilizando o **TRI** no bloco: $m\Delta\vec{V}_G = \sum \vec{I}$
Utilizando a fórmula de campo de velocidade:

$$\vec{V}_G' = \vec{V}_A' + \vec{\omega}' \wedge (G - A) \quad \text{como} \quad \boldsymbol{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_A' = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G' = \vec{\omega}' \wedge (G - A)$$

$$m\left(\vec{V}_G' - \vec{V}_G\right) = m\vec{\omega}' \wedge \left(G - A\right) - V\,\vec{i} = \vec{I} \qquad (0{,}5)$$

Aplicando o **TMI** no bloco - $\Delta\vec{H}_O = \vec{M}_O^{\vec{I}}$ onde $\vec{H}_O = (G - O) \wedge m\vec{V}_O + J_O\,\vec{\omega}$

$$\Delta\vec{H}_G = \left(\vec{H}_G' - \vec{H}_G\right) = \vec{M}_G^{\vec{I}} \qquad \text{como} \qquad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_G' = J_{Gz}\vec{\omega}' = (A - G) \wedge \vec{I}$$

$$J_{Gz}\vec{\omega}' = \left(A - G\right) \wedge \left[m\vec{\omega}' \wedge \left(G - A\right) - mV\,\vec{i}\right] = \left[\left(A - G\right) \wedge m\vec{\omega}' \wedge \left(G - A\right)\right] - \left(A - G\right) \wedge mV\,\vec{i}$$

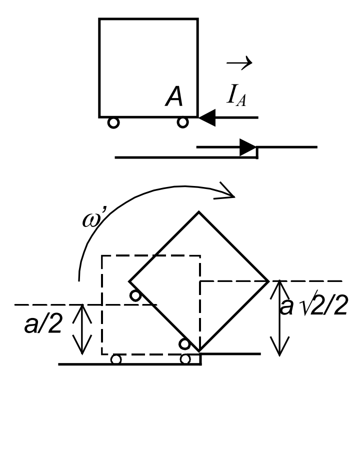
$$J_{Gz}\vec{\omega}' = -\frac{ma^2\omega'}{2}\vec{k} - \frac{a}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \wedge V\,\vec{i} = -\frac{ma^2\omega'}{2}\vec{k} - \frac{maV}{2}\vec{k} \qquad (0{,}5)$$

$$\frac{ma^2}{6}\omega'\,\vec{k} + \frac{ma^2}{2}\omega'\,\vec{k} = -\frac{maV}{2}\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega' = \frac{3V}{4a}} \qquad (1{,}0)$$

b) a energia cinética ***T*** do cubo no instante imediatamente após a colisão;

$$T = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2}J_{zz}^A\omega'^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = 0 + \frac{2}{6}ma^2\left(\frac{3V}{4a}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = \frac{3}{16}mV^2} \qquad (1{,}0)$$

c) a energia potencial do cubo ***V*** é função da altura do centro de massa:



$$V = mg(h_f - h_i) \quad \Rightarrow \quad V = mg\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad V = mga\frac{(\sqrt{2} - 1)}{2} \qquad (0{,}5)$$

Para que o cubo tombe: $T > V$

$$\frac{3}{16}mV^2 > mga\frac{(\sqrt{2} - 1)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V^2 > \frac{8(\sqrt{2} - 1)}{3}ga} \qquad (0{,}5)$$

Alternativamente pode-se aplicar apenas o **TMI** no bloco, mas escolhendo o pólo em ***A***.

Antes da colisão tem-se para o bloco:

$$\vec{H}_A = (G-A)\wedge m\vec{V}_A + J_{zz}^A\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_A = m\left(-\frac{a}{2}\vec{i}+\frac{a}{2}\vec{j}\right)\wedge V_A\,\vec{i}$$

$$\vec{H}_A = \frac{a}{2}mV_A\,\vec{k} \qquad \text{pois} \qquad \omega = 0 \qquad (0{,}5)$$

Depois da colisão resulta em:

$$\vec{H}'_A = (G-A)\wedge m\vec{V}'_A + J_{zz}^A\,\vec{\omega}' \quad \Rightarrow \quad \vec{H}'_A = J_{zz}^A\,\omega'\,\vec{k} \qquad \text{pois} \qquad \vec{V}'_A = 0$$ (colisão plástica ***e*** = 0).

$$J_{zz}^A\,\vec{\omega}' = \frac{a}{2}m\vec{V}_A \quad \text{como} \quad J_{zz}^A = J_{zz}^G + md^2 \quad \Rightarrow \quad J_{zz}^A = \frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2 \qquad (0{,}5)$$

Utilizando o **TMI** $\Delta\vec{H}_A = \left(\vec{H}'_A - \vec{H}_A\right) = \vec{M}_A$ onde $\vec{M}_A = 0$

$$\boxed{\omega' = \frac{3V}{4a}} \qquad (1{,}0)$$