

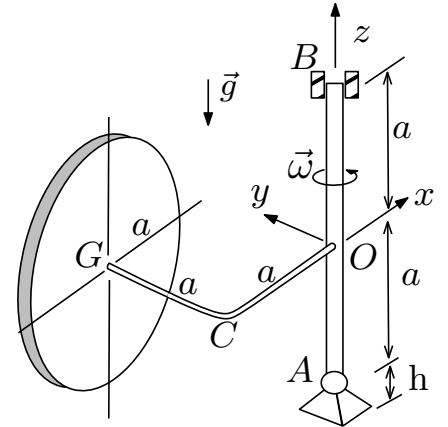


PME 3200 – MECÂNICA II – Prova 1 – 02 de Abril de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

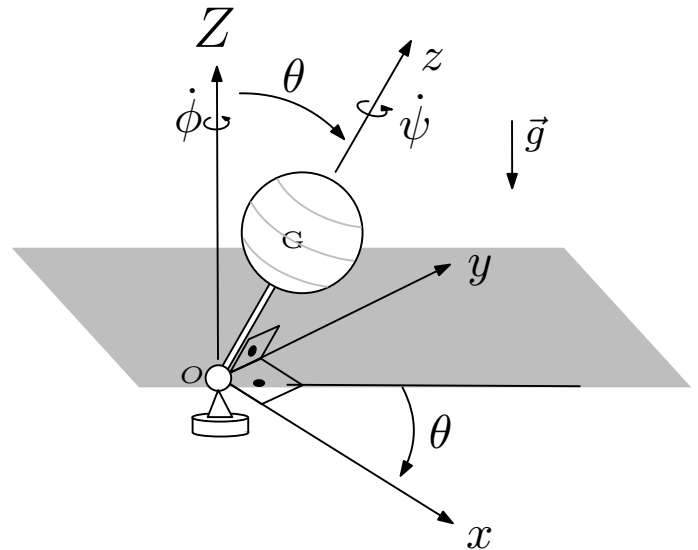
Questão 1 (3,5 pontos). O corpo rígido *único* da figura ao lado é formado pelos seguintes componentes soldados entre si: um eixo AB de comprimento $2a$, duas hastes, OC e CG , ambas de comprimento a e um disco homogêneo de raio a . O eixo e as hastes possuem massa desprezível, ao passo que o disco possui massa m . O corpo rígido é sustentado por uma articulação em A e por um mancal (anel) em B , ambos ideais, e gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ em torno do eixo AB . Utilizando o sistema de coordenadas $Oxyz$ solidário ao corpo (versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) pedem-se, em função dos parâmetros a, m, g e ω :

- a) a matriz de inércia J_O com respeito ao sistema $Oxyz$;
- b) o vetor momento da quantidade de movimento (quantidade de movimento angular) \vec{H}_O ;
- c) o diagrama de corpo livre do corpo rígido;
- d) as reações vinculares em A e em B .



Questão 2 (3,5 pontos). A esfera homogênea de massa m , raio $r/2$ e centro de massa G gira em relação à haste OG , de massa desprezível, com velocidade angular de módulo constante $\dot{\psi}$. O sistema tri-ortogonal de referência $Oxyz$ (versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) é solidário à haste OG e possui velocidade angular constante $\dot{\phi} = \dot{\phi} \vec{K}$, onde \vec{K} é o versor da direção OZ , fixa em relação a um referencial inercial. Sabe-se, também, que θ é constante e que $0 < \theta < \pi/2$. Todo o conjunto é sustentado pela articulação esférica ideal em O . São dadas as dimensões $OG = r$ e a matriz de inércia com respeito a $Oxyz$, diagonal, com $J_{Ox} = 11mr^2/10$, $J_{Oy} = 11mr^2/10$, $J_{Oz} = mr^2/10$. Determine, utilizando o sistema $Oxyz$:

- a) a velocidade angular instantânea absoluta da esfera;
- b) a quantidade de movimento angular com respeito ao polo O ;
- c) o binário giroscópico atuante na esfera;
- d) a relação entre $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ para que o movimento conforme descrito ocorra. Como é denominado tal movimento?





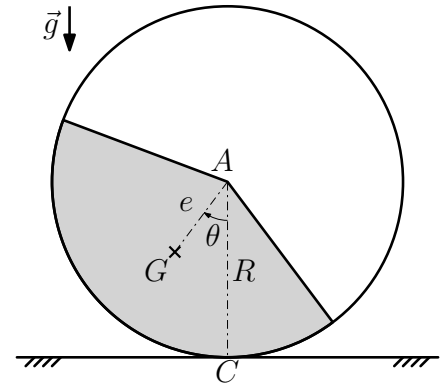
Questão 3 (3,0 pontos). Na figura ao lado é ilustrado o sistema analisado na primeira parte do EMSC 2019. No quadro abaixo dela é mostrada a equação de movimento deste sistema.

a) Escreva a expressão do período de oscilações T_L do sistema linearizado em torno da configuração estável de equilíbrio.

Para cada um dos itens seguintes, pede-se uma análise, em um parágrafo, à luz dos conceitos da Mecânica. Se achar necessário, o aluno pode esboçar gráficos para ilustrar sua resposta.

b) Os períodos observados nas simulações são superiores ou inferiores a T_L ? À medida que se escolhem condições iniciais para as quais o erro cometido na aproximação pelo sistema linearizado aumenta, o que se observa na resposta dinâmica obtida? Qual o efeito da variação do parâmetro e no período de oscilações?

c) Dentre os cenários de simulação analisados, observa-se que, em alguns, a trajetória no espaço de fase ($\dot{\theta}$ em função de θ) é uma curva fechada, em outros, uma curva aberta. Qual o significado físico desta diferença?



$$\ddot{\theta} = -\frac{2e \operatorname{sen} \theta (g + R\dot{\theta}^2)}{3R^2 - 4Re \cos \theta}$$

Questão 4 (bônus: 1,0 ponto). No método de Euler, utilizam-se 2 sistemas de referência: um fixo no espaço e outro fixo no corpo. Responda então:

- a) em qual dos sistemas o vetor momento da quantidade de movimento do corpo é descrito;
b) justifique a resposta do item anterior.



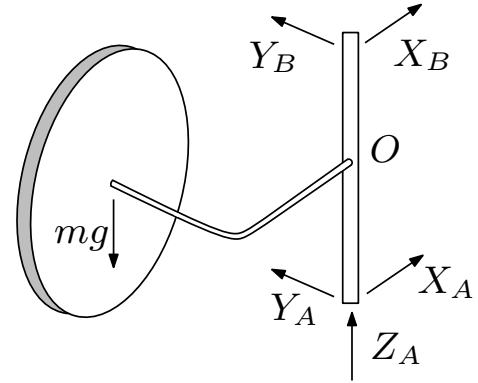
Resolução da Questão 1 (3,5 pontos)

a) Para obter a matriz de inércia pedida, vamos utilizar o Teorema dos Eixos Paralelos de modo a obter os momentos e produtos de inércia do disco (único corpo com massa não desprezível) com respeito ao polo O . Tem-se:

$$(G - O) = a(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$J_{G_x} = ma^2/4, \quad J_{G_y} = ma^2/2 \quad \text{e} \quad J_{G_z} = ma^2/4$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{4} + ma^2 & m.a.a & 0 \\ m.a.a & \frac{ma^2}{2} + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} + 2ma^2 \end{bmatrix} \quad (0,5)$$



b) Como $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$,

$$\vec{H}_O = \frac{9ma^2}{4}\omega\vec{k} \quad (0,5)$$

c) O DCL está representado na figura ao lado. (0,5)

d) O referencial não inercial é solidário ao corpo rígido e $\vec{\omega}$ é constante. Assim:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{0}$$

Pelo TQMA, $\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$. Calcula-se \vec{M}_O^{ext} :

$$\vec{M}_O^{ext} = (B - O) \wedge (X_B\vec{i} + Y_B\vec{j}) + (A - O) \wedge (X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + (G - O) \wedge (-mg\vec{k})$$

$$\vec{M}_O^{ext} = a\vec{k} \wedge (X_B\vec{i} + Y_B\vec{j}) + (-a\vec{k}) \wedge (X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k}) + a(-\vec{i} + \vec{j}) \wedge (-mg\vec{k})$$

Então,

$$\vec{M}_O^{ext} = (-Y_B + Y_A - mg)a\vec{i} + (X_B - X_A - mg)a\vec{j} = \dot{\vec{H}}_O = \vec{0},$$

o que resulta no sistema de equações:

$$\begin{cases} \vec{i}: -Y_B + Y_A - mg = 0 \\ \vec{j}: X_B - X_A - mg = 0 \end{cases} \quad (1,0) \quad (1)$$

As 3 equações restantes são decorrentes da aplicação do Teorema da Resultante.

$$m\vec{a}_G = X_B\vec{i} + Y_B\vec{j} + X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} + Z_A\vec{k} - mg\vec{k}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = \omega^2(\vec{i} - \vec{j}) \quad (0,5)$$

Assim:

$$\begin{cases} \vec{i}: m\omega^2 = X_A + X_B \\ \vec{j}: -m\omega^2 = Y_A + Y_B \\ \vec{k}: Z_A = mg \end{cases} \quad (2)$$



A solução desses dois sistemas de equações fornece (0,5):

$$\begin{aligned} X_A &= m \left(\frac{a\omega^2 - g}{2} \right) & Y_A &= m \left(\frac{-a\omega^2 + g}{2} \right) \\ X_B &= m \left(\frac{a\omega^2 + g}{2} \right) & Y_B &= -m \left(\frac{a\omega^2 + g}{2} \right) \end{aligned}$$

Resolução da Questão 2 (3,5 pontos)

a) Designando por $\vec{\Omega}$ esse vetor, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \dot{\phi}\vec{K} + \dot{\psi}\vec{k} = \dot{\phi}(-\text{sen } \theta\vec{i} + \text{cos } \theta\vec{k}) + \dot{\psi}\vec{k} \\ \vec{\Omega} &= -\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{i} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{k} \quad (0,5) \end{aligned}$$

b)

$$\vec{H}_O = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} \frac{11mr^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11mr^2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{10} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\phi}\text{sen } \theta \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

Denominando $\frac{11mr^2}{10} = J$ e $\frac{mr^2}{10} = I$, temos

$$\vec{H}_O = -J\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{i} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{k} \quad (0,5)$$

c) Para se obter o binário giroscópico, utiliza-se o TQMA com respeito a um polo pertencente ao corpo rígido ou a uma extensão sem massa desse corpo. Esse último é o caso do polo O , que é fixo. Assim,

$$\dot{\vec{H}}_O = \frac{d}{dt} \left(-J\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{i} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{k} \right) = \vec{M}_O$$

O binário giroscópico ativo corresponde ao termo do lado direito da equação acima:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (G - O) \wedge (-mg\vec{K}) \\ \vec{M}_O &= r\vec{k} \wedge (-mg(-\text{sen } \theta\vec{i} + \text{cos } \theta\vec{k})) \\ \vec{M}_O &= mgr \text{sen } \theta\vec{j} \quad (0,5) \end{aligned}$$

d) Em sendo o sistema de referência ligado à haste, o corpo simétrico em relação a este sistema e as condições do enunciado, a única variação observada é na orientação dos versores desta base, cuja velocidade angular absoluta instantânea é $\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{K} = -\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{i} + \dot{\phi}\text{cos } \theta\vec{k}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_O &= -J\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{i} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{k} \\ \dot{\vec{H}}_O &= -J\dot{\phi}\text{sen } \theta\vec{\omega} \wedge \vec{i} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{\omega} \wedge \vec{k} \\ \dot{\vec{H}}_O &= \dot{\phi}\text{sen } \theta I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos } \theta)\vec{j} - J\dot{\phi}^2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta\vec{j} \\ \dot{\vec{H}}_O &= \left[(I - J)\dot{\phi}^2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta + I\dot{\psi}\dot{\phi}\text{sen } \theta \right] \vec{j} \quad (0,5) \end{aligned}$$



Então, pelo TQMA,

$$\left[(I - J)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I\dot{\psi}\dot{\phi} \sin \theta \right] \vec{j} = mgr \sin \theta \vec{j} \quad (0,5)$$

Lembrando que $0 < \theta < \pi/2$, a última equação pode ser simplificada e reescrita como:

$$(I - J) \cos \theta \dot{\phi}^2 + I\dot{\psi}\dot{\phi} - mgr = 0. \quad (0,5)$$

A equação quadrática em $\dot{\phi}$ acima pode ser resolvida para fornecer a condição pedida:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2(I - J) \cos \theta} \left(-I\dot{\psi} \pm \sqrt{I^2\dot{\psi}^2 + 4(I - J) \cos \theta mgr} \right)$$

Para que a solução pertença ao conjunto dos números reais é necessário que:

$$\begin{aligned} I^2\dot{\psi}^2 + 4(I - J) \cos \theta mgr &\geq 0 \\ \dot{\psi}^2 &\geq \frac{-4mgr(I - J) \cos \theta}{I^2} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de I e J tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^2 &\geq \frac{-4mgr\left(\frac{mr^2}{10} - \frac{11mr^2}{10}\right) \cos \theta}{\frac{m^2r^4}{100}} \\ \dot{\psi}^2 &\geq \frac{-4mgr(-mr^2) \cos \theta}{\frac{m^2r^4}{100}} \\ \dot{\psi} &\geq 20\sqrt{\frac{g \cos \theta}{r}} \end{aligned}$$

Finalmente, a condição descrita denomina-se precessão estacionária.

Resolução da Questão 3 (3,0 pontos)

a) (1,0) Defina-se:

$$f(\theta, \omega) = -\frac{2e \sin \theta (g + R\omega^2)}{3R^2 - 4Re \cos \theta}$$

Neste caso, a equação de movimento do sistema é dada por:

$$\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{2e \sin \theta (g + R\dot{\theta}^2)}{3R^2 - 4Re \cos \theta}$$

Assim, as configurações de equilíbrio do sistema correspondem aos valores de θ para os quais $f(\theta, 0) = 0$, ou seja:

$$f(\theta, 0) = -\frac{2e \sin \theta g}{3R^2 - 4Re \cos \theta} = 0$$

Portanto, os estados de equilíbrio do sistema são dados por: $\theta = k\pi$, $\dot{\theta} = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$.



A linearização das equações de movimento pode ser realizada a partir da aplicação do Teorema de Taylor:

$$\ddot{\theta} = f(k\pi, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\substack{\theta = k\pi \\ \omega = 0}} \Delta\theta + \left. \frac{\partial f}{\partial \omega} \right|_{\substack{\theta = k\pi \\ \omega = 0}} \Delta\dot{\theta} + O(\Delta^2)$$

$$\ddot{\theta} = \left[-\frac{2e \cos \theta (g + R\omega^2)}{R(3R - 4e \cos \theta)} + \frac{8e^2 \sin^2 \theta (g + R\omega^2)}{R(3R - 4e \cos \theta)^2} \right]_{\substack{\theta = k\pi \\ \omega = 0}} \Delta\theta + \left[-\frac{4e\omega \sin \theta}{3R - 4e \cos \theta} \right]_{\substack{\theta = k\pi \\ \omega = 0}} \Delta\dot{\theta} + O(\Delta^2)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2e(-1)^k g}{R(3R - 4e(-1)^k)} \Delta\theta + O(\Delta^2)$$

Observe que, apenas para valores pares do inteiro k , ou seja, para $\theta = 2k\pi \equiv 0$, esta equação linearizada corresponde a um oscilador estável. Neste caso, a equação linearizada pedida é:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2eg}{R(3R - 4e)}\theta$$

Por analogia, esta equação corresponde à equação linearizada de um pêndulo de comprimento equivalente:

$$\ell_{\text{eq}} = \frac{R(3R - 4e)}{2e} = R \left(\frac{3R}{2e} - 2 \right)$$

Assim, o período de oscilações T_L do sistema linearizado em torno da configuração estável de equilíbrio é dado por:

$$T_L = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{\text{eq}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{R(3R - 4e)}{2eg}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{3R}{2e} - 2 \right)}$$

Observações:

- Caso fosse previamente notado que os únicos estados estáveis de equilíbrio do sistema são $\theta = 2k\pi \equiv 0$, $\dot{\theta} = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$, seria possível obter a forma linearizada da equação de movimento do sistema por meio da aproximação $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\dot{\theta}^2 \approx 0$, válida na vizinhança dos referidos estados:

$$\ddot{\theta} \approx \left[-\frac{2e \sin \theta (g + R\dot{\theta}^2)}{3R^2 - 4Re \cos \theta} \right]_{\substack{\cos \theta \approx 1 \\ \sin \theta \approx \theta \\ \dot{\theta}^2 \approx 0}} \approx -\frac{2eg}{R(3R - 4e)}\theta$$

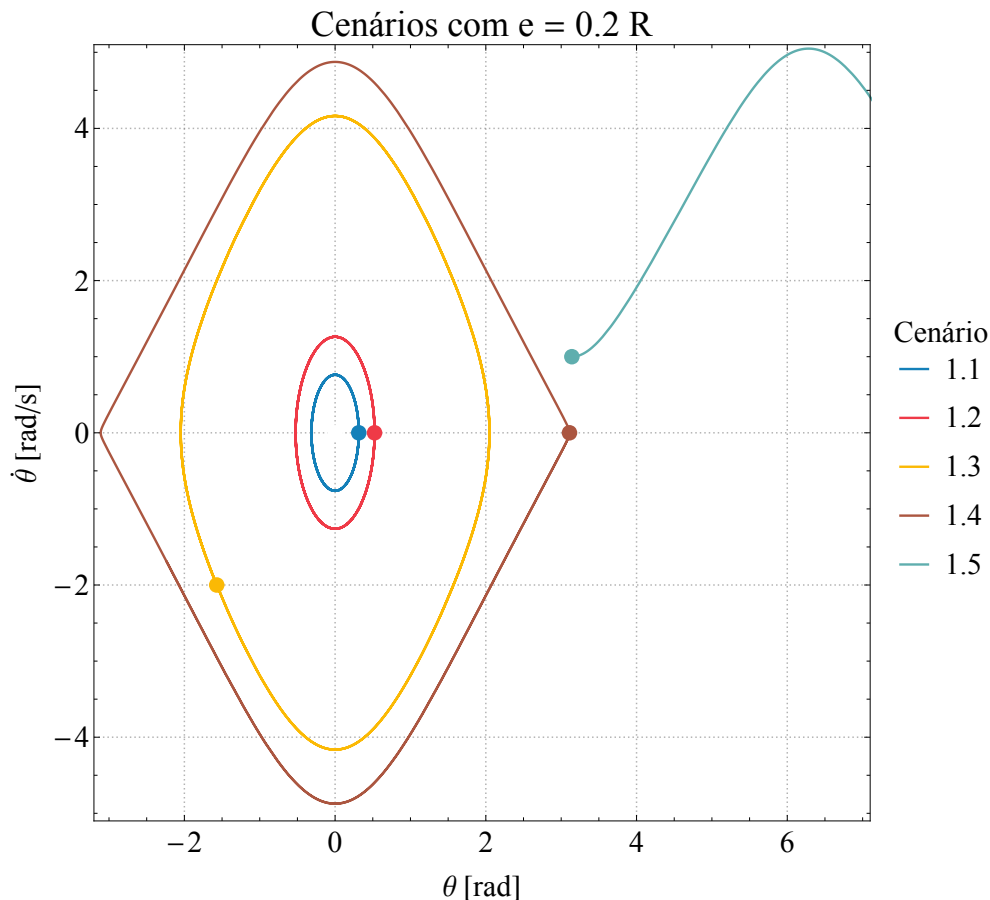
- Para que $\ell_{\text{eq}} > 0$ é necessário que $e < 3R/4$; isto, todavia, não representa uma restrição à aplicação do modelo, uma vez que os valores fisicamente possíveis para o parâmetro de excentricidade e satisfazem a relação $0 \leq e < 2R/3$ (com $e \rightarrow 2R/3$ à medida que o ângulo central do setor circular tende a zero).

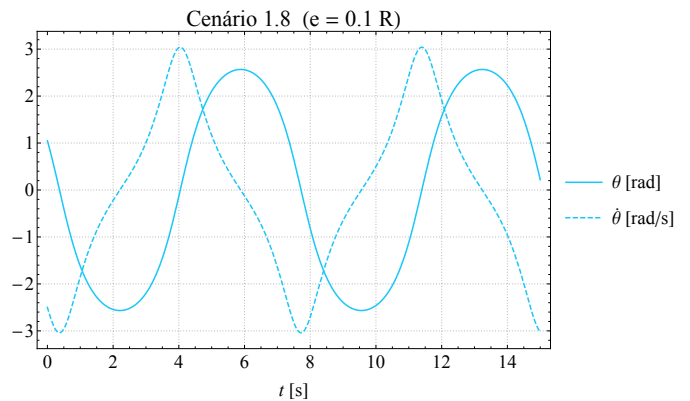
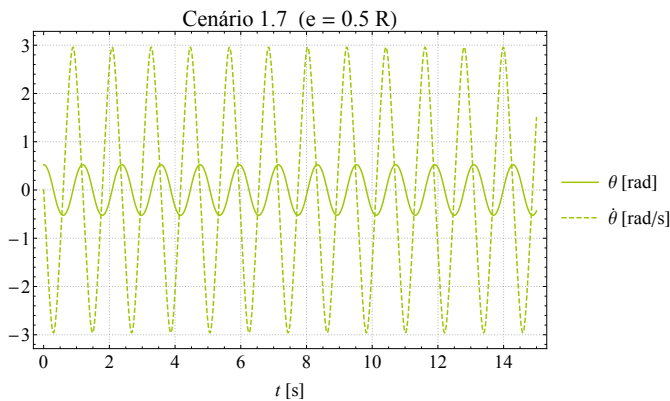
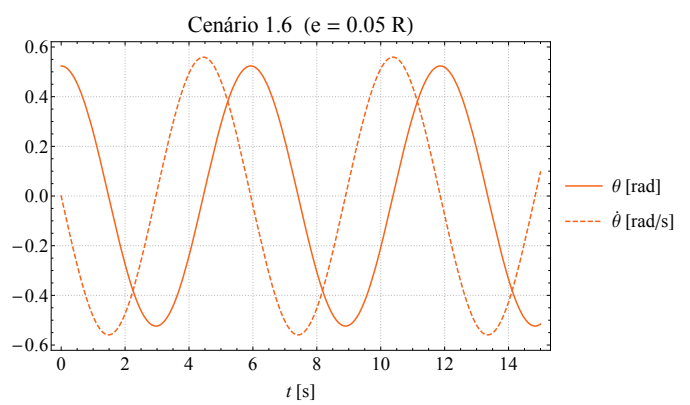
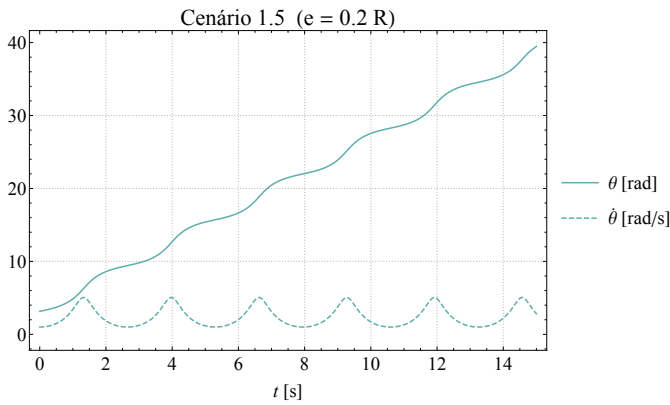
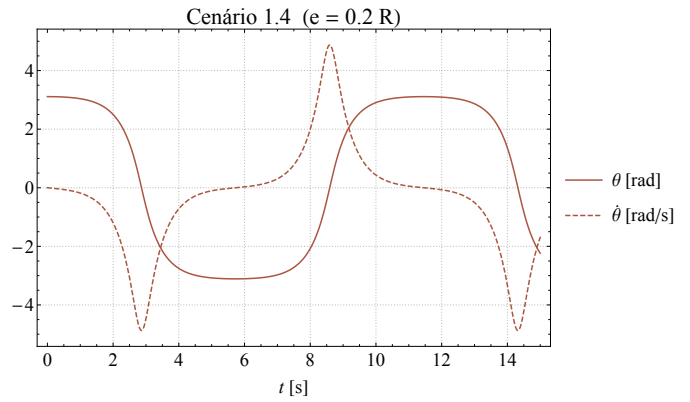
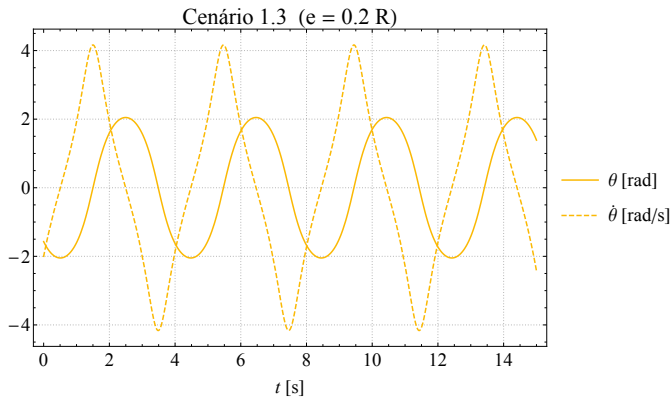
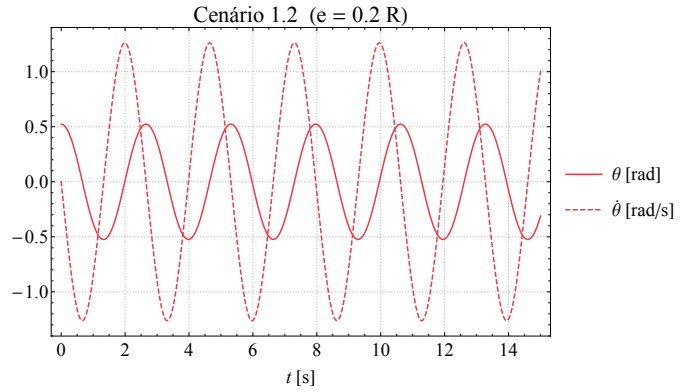
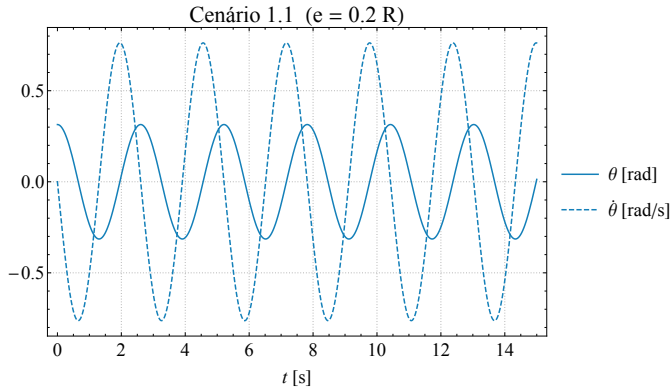


b) (1,5) Os períodos T observados nas simulações numéricas, realizadas com as equações de movimento não-lineares, são *maiores* do que os correspondentes períodos T_L de oscilações do sistema linearizado. À medida que as trajetórias no plano de fase, univocamente definidas pelas condições iniciais escolhidas, se afastam do ponto de equilíbrio estável $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, maior o erro cometido na aproximação das séries temporais de θ e $\dot{\theta}$ como respostas de um sistema linearizado (ou seja, aproximação como combinações lineares de $\sin(2\pi t/T_L)$ e $\cos(2\pi t/T_L)$). Em particular, para os casos em que a resposta dinâmica do sistema apresenta comportamento oscilatório, quanto maior este afastamento, maior o período de oscilações T observado e, conseqüentemente, maior a diferença $T - T_L$. Ainda, observa-se nas simulações que quanto maior o valor do parâmetro e , menor o período T de oscilações. Note que este mesmo comportamento em função de e também pode ser previsto para o período de oscilações do sistema linearizado T_L a partir da expressão apresentada no item anterior, uma vez que, quanto maior e , menor o comprimento de pêndulo equivalente ℓ_{eq} .

c) (0,5) Observa-se que, em todos os cenários que apresentam resposta oscilatória, as trajetórias no espaço de fase correspondem a curvas fechadas, o que se deve ao fato de o sistema ser conservativo. No cenário 1.5, a trajetória correspondente no espaço de fase é uma curva aberta, o que indica que, para o valor da energia mecânica disponível, o anel externo é capaz de dar voltas completas, apresentando uma resposta não-oscilatória.

As respostas dos itens (b) e (c) são ilustradas com os gráficos a seguir, que correspondem às respostas esperadas para os cenários de simulação propostos na primeira parte do EMSC 2019.





**Resolução da Questão 4 (bônus)(1,0 ponto)**

a) (0,5): no método de Euler, o vetor momento da quantidade de movimento é descrito utilizando o sistema fixo no corpo;

b) (0,5): em se procedendo da maneira descrita acima, quando da diferenciação em relação ao tempo do vetor momento da quantidade de movimento (\vec{H}), pode-se considerar invariável a distribuição de massa (representada pela matriz de inércia) do corpo com respeito ao sistema de referência a ele solidário.

Especificamente, suponhamos que o momento da quantidade de movimento de um corpo rígido qualquer tenha sido obtido com respeito a um polo O , por simplicidade, admitido fixo (caso do ponto de apoio de um pino, por exemplo) ou coincidente com o seu centro de massa. Seja um sistema de referência $Oxyz$ que possui velocidade angular absoluta instantânea $\vec{\omega}$ distinta da velocidade angular absoluta instantânea do corpo, $\vec{\omega}^*$. Consideremos, também, um sistema de referência $OXYZ$ fixo no espaço. Então, a variação temporal absoluta do vetor \vec{H}_O ,

$$\vec{H}_O = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] J_O \vec{\omega}^*,$$

onde J_O é a matriz de inércia do corpo com respeito ao polo O e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os versores da base associada ao sistema de referência móvel, é expressa por

$$\dot{\vec{H}}_O|_{OXYZ} = \dot{\vec{H}}_O|_{Oxyz} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_O$$

Do ponto de vista de um observador posicionado no sistema de referência móvel (primeiro termo do lado direito da equação acima), tanto a distribuição de massa com respeito a esse sistema quanto as componentes de $\vec{\omega}^*$ ($\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$) variam com o tempo. Assim:

$$\dot{\vec{H}}_O|_{OXYZ} = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \frac{d(J_O)}{dt} \begin{pmatrix} \omega_x^* \\ \omega_y^* \\ \omega_z^* \end{pmatrix} + [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] J_O \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x^* \\ \dot{\omega}_y^* \\ \dot{\omega}_z^* \end{pmatrix} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_O$$

A diferenciação da matriz de inércia em relação ao tempo não é trivial. Fazendo-se o sistema de referência solidário ao corpo rígido, ou seja, $\vec{\omega} = \vec{\omega}^*$, o primeiro termo do lado direito da equação acima se anula, tornando a expressão mais simples, a saber,

$$\dot{\vec{H}}_O|_{OXYZ} = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] J_O \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x^* \\ \dot{\omega}_y^* \\ \dot{\omega}_z^* \end{pmatrix} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_O$$

Justifica-se, assim, o método.